

TD - Previsions fonctions de la variable à variables

Ex 1.

Etudions la continuité de F en $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Prenons : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{x_n = \frac{\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^n \rfloor}{10^n}}_{\in \mathbb{Q}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = x_n^2$$

Par ℓ° de $x \mapsto x^2$,

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}^2 = 2 \neq \sqrt{2} = f(\sqrt{2})$$

donc f n'est pas continue en $\sqrt{2}$.

Ex 23

$f:]0;1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]0;1[$ tel que pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) \neq 0$ et $f(0) = 0$

Par l'absurde, supposons que f change au moins une fois de signe.

Cad. $\exists a, b \in]0;1[$ tel que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.
(On remarque que $a \neq b$)

Par le TVI ($f \ell^\circ$ sur $]0;1[$);

$\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

Or si $f(a) = f(c) = 0$ et f continue sur $]0; c[$ et

derivable sur $]0; c[$; d'après Rolle ;
 $\exists \xi \in]0; c[$ tel que $f'(\xi) = 0$

D'où la contradiction

Ex 2

$\triangle (\forall x \in [a; b] \quad f(x) = g(x) \text{ ou } f(x) = -g(x))$

$\neq$

$(\forall x \in [a; b] \quad f(x) = g(x)) \text{ ou } (\forall x \in [a; b] \quad f(x) = -g(x))$

