

TD – Révisions sur les fonctions de la variable réelle à valeurs réelles

1. Exercices sur la continuité	1
2. Exercices sur la dérivabilité	2
3. Exercices sur la convexité	5

1. Exercices sur la continuité

Exercice 1 ★★☆☆ — Étudier la continuité de l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} . \end{cases} \end{cases}$$

carreSurEnsembleRationnelsIdentiteAilleurs

Exercice 2 ★☆☆ — Soient a, b des réels tels que $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que $|f| = |g|$ et que, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \neq 0$. Démontrer que $f = g$ ou $f = -g$.

fonctionsContinuesEgalesEnValeurAbsolue

Exercice 3 ★☆☆ — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique. Démontrer que la fonction f est bornée.

fonctionContinuePeriodiqueBornee

Exercice 4 ★☆☆ — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction périodique telle que f possède une limite $\ell \in \mathbf{R}$ en $+\infty$. Démontrer que la fonction f est constante.

fonctionPeriodiqueLimiteFinieEnPlusInfiniConstante

Exercice 5 ★☆☆ — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbf{R}$.

fonctionContinueLimiteInfinieEnInfiniMinimum

Exercice 6 ★★☆☆ — Soit $p, q \in \mathbf{R}_+^*$ et $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(0) \neq f(1)$. Démontrer que :

$$\exists x_0 \in]0, 1[\quad p f(0) + q f(1) = (p + q) f(x_0) .$$

fonctionContinueSegmentBarycentreImagesExtremitesImage

Exercice 7 ★★☆☆ — Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une application. Démontrer que f possède un point fixe dans les deux cas suivants.

1. L'application f est continue sur $[0, 1]$.
2. L'application f est croissante sur $[0, 1]$. On pourra considérer la borne supérieure de $A = \{x \in [0, 1] : x \leq f(x)\}$.

conditionsSuffisantesPointFixeApplicationSegmentVersLuiMeme

Exercice 8 ★★☆☆ — Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue telle que :

$$\exists \ell \in]0, 1[\quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell .$$

Démontrer que la fonction f possède un point fixe.

pointFixeApplicationContinueRplusVersRplusLimiteEntreZeroUnEnPlusInfini

Exercice 9 ★☆☆☆ — Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une application croissante telle que l'application :

$$g \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \frac{f(x)}{x} \end{array} \right.$$

soit décroissante. Démontrer que la fonction g est continue. Qu'en est-il de la fonction f ?

fonctionCroissanteSurRplusAvecFonctionPenteEnZeroDecroissante

Exercice 10 ★☆☆☆ — Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Démontrer que :

$$\exists c \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right) .$$

varianteTheoremeBorsukUlamDimension1

Exercice 11 ★★☆☆ — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \sqrt[3]{|x|} \end{array} \right.$$

est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

uniformeContinuiteRacineCubique

Exercice 12 ★★☆☆ — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 .$$

Démontrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

uniformeContinuiteFonctionContinueLimitesNullesEnInfini

2. Exercices sur la dérivabilité

Exercice 13 ★☆☆☆ — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x e^{-x} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et calculer ses dérivées itérées.

calculToutesDeriveesIterees

Exercice 14 ★★☆☆ — *Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:*

$$g_n \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}^* & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x^{n-1} e^{1/x} . \end{array} \right.$$

Calculer $g_n^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

calculDeriveeNiemeSuiteFonctions

Exercice 15 ★★☆☆ — *Soit la fonction f définie par :*

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 . \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que la fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

fonctionPlate

Exercice 16 ★☆☆ — *Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction bornée et dérivable sur $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Démontrer que $\ell = 0$.*

fonctionBorneeDerivableDeriveeLimiteNulleEnPlusInfini

Exercice 17 ★☆☆ — *Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer que :*

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \exists (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n \quad x_1 < \dots < x_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n f'(x_k) = n .$$

generalisationTheoremeAccroissementsFinis

Exercice 18 ★☆☆ — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ ouvert non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . On suppose qu'il existe un point a un de I tel que $f'(a) > 0$. Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que :*

- (a) l'intervalle $]a - r, a + r[$ est inclus dans I ;
- (b) la fonction f est strictement croissante sur $]a - r, a + r[$;
- (c) l'image de l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$ est l'intervalle ouvert $]f(a - r), f(a + r)[$;
- (d) l'application :

$$\tilde{f} \left| \begin{array}{ll}]a - r, a + r[& \longrightarrow]f(a - r), f(a + r)[\\ x & \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

est bijective ;

- (e) l'application $\tilde{f}^{-1} :]f(a - r), f(a + r)[\longrightarrow]a - r, a + r[$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

theoremeInversionLocaleDimension1

Exercice 19 ★☆☆ — *Démontrer que la fonction*

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 . \end{cases} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbf{R}$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

fonctionDerivableNonClasseC1

Exercice 20 ★☆☆ — Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}^* & \longrightarrow \\ x & \longmapsto 1 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right. \mathbf{R}$$

1. Déterminer $I = f(\mathbf{R}^*)$, puis démontrer que I est stable par f .
2. Démontrer que la fonction f est $\frac{4}{9}$ -lipschitzienne sur I .
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe α de f sur I et discuter la vitesse de convergence vers 0 de la suite $(u_n - \alpha)_{n \in \mathbf{N}}$.

suiteRecurrenteApplicationSousJacenteContractante

Exercice 21 ★★☆☆ — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente. On note S sa limite.
2. On considère une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que f soit dérivable en 0 à droite et $f(0) = 0$. On pose $\delta = f'_d(0)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Delta_n(f) = \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$. Démontrer que la suite $(\Delta_n(f))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers δS .
3. Déterminer S en utilisant la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$.
4. Étudier les limites éventuelles de $\sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ et $\sum_{k=n}^{2n} \sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

sommeValeursFonctionAuxInversesEntiers

Exercice 22 ★★☆☆ — Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$, dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, telle que $f(0) = 0$ et f' est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Démontrer que la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \frac{f(x)}{x} \end{array} \right. \mathbf{R}$$

est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

croissanceDeriveeVersusCroissanceFonctionPente

Exercice 23 ★★☆☆ — Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) \neq 0$. Démontrer que la fonction f garde un signe constant sur $[0, 1]$.

deriveeSansPointAnnulationSigneConstant

Exercice 24 ★★☆☆ — Soit $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ telle que $x f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

1. Démontrer que f admet une limite dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
2. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

deriveeEquivalenteInverseEnPlusInfini

Exercice 25 ★★☆☆ — Soient des réels a, b tels que $a < b$, une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$. Soit $x \in]a, b[$. Démontrer que :

$$\exists c \in]a, b[\quad f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(c).$$

expressionQuadratiqueEcartEntreCourbeFonctionEtTangente

Exercice 26 ★☆☆ — Soit un réel $\alpha \in]0, 1[$.

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

2. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\alpha}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{\alpha}$.

equivalentSommesPartiellesSerieRiemannDivergente

Exercice 27 ★☆☆ — Nous confondons polynômes et fonctions polynomiales, ce qui est sans conséquence, car les corps de bases $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ considérés sont infinis.

1. Soit un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$. Démontrer que le polynôme dérivé P' est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$.
2. Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$ et tel que le polynôme P' n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$.
3. Soit un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ qui est scindé sur $\mathbf{R}$. Démontrer que le polynôme dérivé P' est scindé sur $\mathbf{R}$.

polynomesCoefficientsReelsScindesDerivation

3. Exercices sur la convexité

Exercice 28 ★☆☆ — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe et concave. Démontrer que f est affine.

fonctionConvexeConcaveSurR

Exercice 29 ★☆☆ — Soit $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$. Démontrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

sommeCarresVersusCarreSomme

Exercice 30 ★☆☆ — Soit $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$. Démontrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \geq n^2.$$

minorationSommeFoisSommeInverses

Exercice 31 ★★☆☆ — Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer que l'ensemble des points où f admet son minimum est un segment.

ensembleAntecedentsMinimumFonctionConvexeSegment

Exercice 32 ★★☆☆ — Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer que f atteint son maximum en a ou en b .

antecedentsMaximumFonctionConvexeSegment

Exercice 33 ★★★ — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction strictement convexe, i.e. telle que, pour tous réels x, y distincts :

$$\forall \lambda \in]0, 1[\quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au plus deux solutions.

nombrePointsIntersectionGrapheFonctionStrictementConvexeAxeAbscisse

Exercice 34 ★★☆ — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe majorée. Démontrer que f est constante.

fonctionConvexeMajoreeSurR

Exercice 35 ★★★ — Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe admettant un minimum local en un point intérieur de I . Démontrer qu'il s'agit d'un minimum global.

minimumLocalAtteintPointInterieurFonctionConvexe

Exercice 36 ★★★ — Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe.

1. Démontrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\overset{\circ}{I}$ (intérieur de l'intervalle I).
2. En déduire que f est continue sur $\overset{\circ}{I}$.

derivabiliteFonctionConvexeDroiteGauchePointInterieur

Exercice 37 ★★★ — Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe dérivable et soit $x_0 \in I$.

1. Démontrer que l'intersection du graphe de f et de sa tangente au point d'abscisse x_0 est un intervalle de $\mathbf{R}^2$.
2. Que dire de plus si f est strictement convexe, i.e. si pour tous points distincts x, y de I :

$$\forall \lambda \in]0, 1[\quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

ensemblePointsIntersectionGrapheFonctionConvexeDerivableAvecUneTangente

Exercice 38 ★★☆ — Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

1. Justifier l'existence de réels a et b tels que, pour tout $x \in [0, 1]$, $a \leq f(x) \leq b$.
2. Justifier que $\int_0^1 f(x) dx \in [a, b]$.
3. Soit $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x) dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x)) dx \quad [\text{inégalité de Jensen}].$$



Johan Jensen (1859-1925)

inegaliteJensenIntegrale

Exercice 39 ★☆☆ — Soient $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$. Démontrer que :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad [\text{inégalité arithmético-géométrique}].$$

inegaliteArithmeticoGeometrique

Exercice 40 ★★☆☆ — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice bistochastique, i.e. telle que :

- (a) les coefficients de A sont positifs ou nuls ;
- (b) la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 1 ;
- (c) la somme des coefficients de chaque colonne de A vaut 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ et $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Démontrer que $\prod_{i=1}^n x_i \leq \prod_{i=1}^n y_i$.

matricesBistochastiques

Exercice 41 ★☆☆ — Soit g la fonction définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^x \end{array} \right. \quad [\text{on rappelle que } 0^0 = 1].$$

1. Justifier que la fonction g est continue sur $[0, 1]$.
2. Soit un entier $n \geq 2$. Démontrer que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n \quad \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}} \leq \frac{x_1^{x_1} + \dots + x_n^{x_n}}{n}.$$

majorationMoyennePuissanceMoyenne

Exercice 42 ★★☆☆ — Soient des réels $p > 0, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et un entier $n \geq 2$.

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$:

$$x y \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q.$$

Il s'agit de l'inégalité de Young.



William Henry Young (1863-1942)

2. Démontrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$, pour tout $(y_1, \dots, y_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Il s'agit de l'inégalité de Hölder.



Otto Ludwig Hölder (1859-1937)

2. Démontrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{2n}$:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Il s'agit d'une inégalité due à Minkowski.



Hermann Minkowski (1864-1909)

inegalitesYoungHoelderMinkowski

Exercice 43 ★★★ — Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Démontrer que la fonction f est convexe.

caracterisationFonctionsConvexesContinuesMilieuxCordes
