Exercice 2 : Soient $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq a+b$,
Montrons que $\binom{a+b}{n} = \sum_{K=0}^{n} \binom{a}{K}\binom{b}{n-K}$

Indications :

- $(K,n) \in \mathbb{Z}^2$, $\binom{n}{K} = \begin{cases} \dfrac{n!}{K!(n-K)!} & \text{si } 0 \leq K \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Si $0 \leq K \leq n$, $\binom{n}{K} = |P_K(\text{ensemble à } n \text{ élm}^{\text{ts}})|$
- Soit $p \in \mathbb{N}$, $(1+X)^p = \sum_{K=0}^{p} \binom{p}{K} X^K$

Solution : ⚠ classique concours

↳ Approche Combinatoire : (plus classique)

- 1ère approche (bijection) :

$$\begin{aligned} P_n(⟦1, a+b⟧) &\to \big(\{(A,B) \in \mathcal{P}(⟦1,a⟧) \times \mathcal{P}(⟦a+1, b+a⟧) : |A \sqcup B| = n\}\big) \ (*) \\ C &\overset{\varphi}{\longmapsto} (C \cap ⟦1,a⟧, C \cap ⟦a+1; a+b⟧) \\ A \cup B &\underset{\psi}{\longleftarrow} (A,B) \end{aligned}$$

↳ bijection

$$(*) = \bigsqcup_{i=0}^{a} \left\{(A,B) \;\middle|\; \begin{matrix} A \in P_i(⟦1,a⟧) \\ B \in P_{n-i}(⟦a+1; b+a⟧) \end{matrix}\right\}$$
$$= \bigsqcup_{i=0}^{a} P_i(⟦1,a⟧) \times P_{n-i}(⟦a+1; b+a⟧)$$

Donc,
$$\boxed{\binom{a+b}{n}} = |P_n(⟦1; a+b⟧)|$$
$$= \left| \bigsqcup_{i=0}^{a} P_i(⟦1;a⟧) \times P_{n-i}(⟦a+1; b+a⟧) \right|$$
$$= \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{n-i} = \boxed{\sum_{i=0}^{n} \binom{a}{i}\binom{b}{n-i}}$$

si $n < a$, alors $\binom{b}{n-i} = 0$ à partir de $i = n+1$
si $n \geq a$, alors $\binom{a}{i} = 0$ à partir de $i = a+1$

↳ Approche Polynomiale

↳ (plus efficace / rapide)

- On remarque $[(1+X)^{a+b}]_n = \left[\sum_{K=0}^{a+b} \binom{a+b}{K} X^K\right]_n$

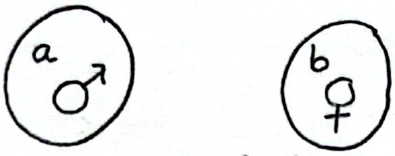
$$\boxed{= \binom{a+b}{n}}$$

- D'autre part, $[(1+X)^{a+b}] = [(1+X)^a(1+X)^b]$

(produit de polynômes) $\longrightarrow$ $= \sum_{K=0}^{n} [(1+X)^a]_K \, [(1+X)^b]_{n-K}$

$$\boxed{= \sum_{K=0}^{n} \binom{a}{K}\binom{K}{n-K}}$$

↳ Approche imagée :



- $\binom{a+b}{n}$ = nombre de groupes de n individus

Choix du nombre de garçons : $K \in [\![0, a]\!]$
Choix des K garçons : $\binom{a}{K}$
Choix des $n-K$ filles : $\binom{b}{n-K}$

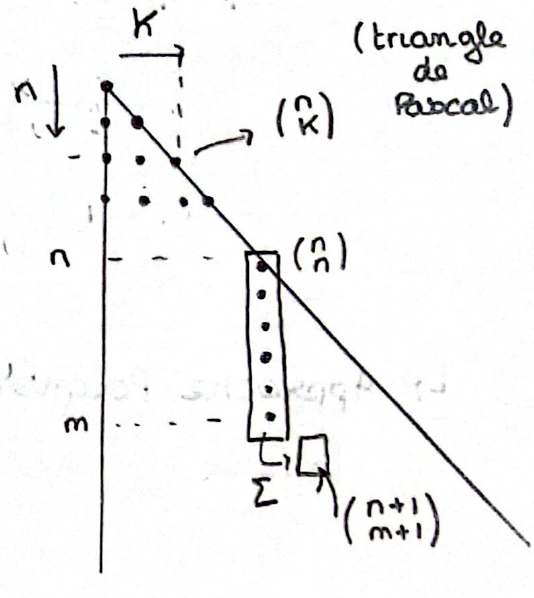
$$\rightsquigarrow \boxed{\sum_{K=0}^{a} \binom{a}{K}\binom{b}{n-K}}$$

Exercice 3 :

↳ Par récurrence :

⚠ Prédicat : Difficile à bien formuler

Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$:
$\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(m)$: " $\forall n \in [\![0, m]\!]$,
$\sum_{K=n}^{m} \binom{K}{n} = \binom{m+1}{n+1}$ "



Initialisation : Pour $m = 0$:

$$\sum_{K=0}^{m} \binom{K}{n} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{m+1}{1}$$

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(m)$. Soit $n \in [\![0, m+1]\!]$,

$$\sum_{K=n}^{m+1} \binom{K}{n} = \binom{m+1}{n} + \sum_{K=n}^{m} \binom{K}{n}$$

$$= \binom{m+1}{n} + \binom{m+1}{n+1} \quad (HR)$$

$$= \boxed{\binom{m+2}{n+1}}, \text{ concluant la récurrence}$$

↳ Approche 2 : Téléscopique

$$\sum_{K=n}^{m} \binom{K}{n} = \sum_{K=n}^{m} \left(\binom{K+1}{n+1} - \binom{K}{n+1} \right)$$

$$= \binom{m+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \boxed{\binom{m+1}{n+1}}$$

Exercice 5 :

- $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $s_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$

q1) Démontrons que $n^p = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} s_{p,K}$

- $n^p = \left| [\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]} \right| = \left| \mathcal{F}([\![1,p]\!], [\![1,n]\!]) \right|$

$$= \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} \{ f \in E : f([\![1,p]\!]) = A \}$$

$$= \bigsqcup_{K=0}^{n} \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}_K([\![1,n]\!])} \left(\{ f \in E : f([\![1,p]\!]) = A \} \right) \quad (*)$$

- Or, $\left| \{ f \in E : f([\![1,p]\!]) = A \} \right| = \left| Surj([\![1,p]\!], A) \right|$

soit $A \in \mathcal{P}_K([\![1,n]\!])$, $\exists\, \varphi : [\![1,K]\!] \to A$ bij

- Construisons $Surj([\![1,p]\!], A) \xrightarrow{bij} Surj([\![1,p]\!], [\![1,K]\!])$

$$s \longmapsto \varphi^{-1} \circ s$$

$$\varphi \circ \sigma \longleftarrow \sigma$$

Donc $\left| Surj([\![1,p]\!], A) \right| = s_{p,K}$

• Passons aux cardinaux dans *

$$\underbrace{\text{Card}(E)}_{n^p} = \sum_{K=0}^{n} \sum_{A\in \mathcal{P}_K(⟦1,n⟧)} s_{p,K}$$

$$\hookrightarrow = \binom{n}{K} s_{p,K}$$

Donc, $\boxed{n^p = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} s_{p,K}}$

Q2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ b_n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} a_K$

Démontrons que : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = \sum_{K=0}^{n} (-1)^{n-K} \binom{n}{K} b_K$

• $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{K=0}^{n} (-1)^{n-K} \binom{n}{K} \sum_{i=0}^{K} \binom{n}{i} a_i$

$$= \sum_{K=0}^{n} \sum_{i=0}^{K} (-1)^{n-K} \binom{n}{K}\binom{K}{i} a_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{K=i}^{n} (-1)^{n-K} \binom{n}{K}\binom{K}{i} a_i$$

$$\hookrightarrow \binom{n}{K}\binom{K}{i} = \frac{n!}{(n-K)!\,\cancel{K!}} \times \frac{\cancel{K!}}{(K-i)!\,i!} = \frac{n!}{(n-K)!\,(K-i)!\,i!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{K=i}^{n} (-1)^{n-K} \cdot a_i \cdot \frac{n!}{(n-K)!\,(K-i)!\,i}$$

chgmt indice $\ell = K-i$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n-i} (-1)^{n-\ell-i} \cdot \frac{n!}{(n-\ell-i)!\,\ell!\cdot i!} a_i$$

$\times \frac{(n-i)!}{(n-i)!}$ avec $(n-\ell-i)! = (n-i-\ell)!$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n-i} (-1)^{n-\ell-i} \cdot \binom{n-i}{\ell}\binom{n}{i} a_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i \sum_{\ell=0}^{n-i} (-1)^{n-\ell-i} \binom{n-i}{\ell}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i (-1+1)^{n-i}$$

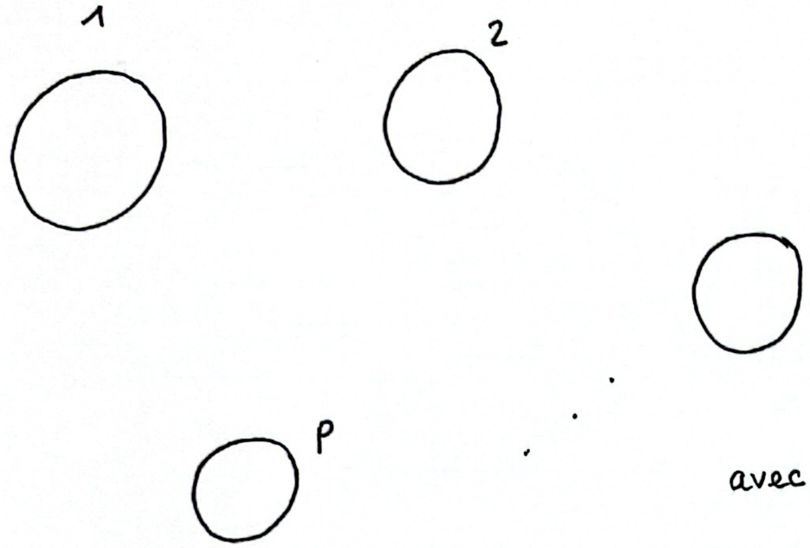
$$= \binom{n}{n} a_n \quad \left(\text{car } 0^m = \begin{cases} 1 \text{ si } m=0 \\ 0 \text{ si } m\geq 1 \end{cases}\right)$$

$$= \boxed{a_n}$$

Q3) Découle de 1 et 2

Exercice 6 : $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$

$\#$ p uplets $(a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que $a_1 + \cdots + a_p = n$



→ p enclos

avec ( $\times n$) moutons

↳ a_1 = # moutons dans l'enclos 1

⋮

a_p = # ——————— p

↳ pas possible d'aboutir car moutons pas numerotés

Technique de Havret : Les boules et batons : (revoir cours HP combinatoire)

$a_1 = 2$ $a_2 = 1$ $a_3 = 3$ ...

O O | O | O O O | O ...

n boules
p-1 cloisons

↳ On place les p-1 cloisons sans ordre et sans répétitions : $\binom{n+p-1}{p-1}$

(suite à faire)