

TD - Dénombrement

Ex 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$; E ensemble fini tel que $|E| = n$

Q1) $F = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : A \subset B\}$

$$= \bigsqcup_{B \in \mathcal{P}(E)} \left\{ (A, B) : \begin{array}{c} \text{fixe} \uparrow \\ A \in \mathcal{P}(B) \end{array} \text{ et } \underbrace{A \subset B}_{\substack{\text{à pour card } |\mathcal{P}(B)|}} \right\}$$

$$= \bigsqcup_{k=0}^n \bigsqcup_{B \in \mathcal{P}_k(E)} \left\{ (A, B) : A \in \mathcal{P}(B) \right\}$$

Donc: $|F| = \sum_{k=0}^n \sum_{B \in \mathcal{P}_k(E)} \underbrace{|\mathcal{P}(B)|}_{= 2^k}$

$$= \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} 1^{n-k}$$

$$|F| = 3^n$$

2nd approche:

On pose Application:

$$\begin{array}{c|c} \psi & F \longrightarrow \{0, 1, 2\}^E \\ & (A, B) \longmapsto \begin{array}{c} E \longrightarrow \{0, 1, 2\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \notin B \end{cases} \end{array} \end{array}$$

bien déf.

$$(A, B) \longleftarrow f: E \rightarrow \{0, 1, 2\} : \psi$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \{x \in E: f(x) = 0\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \{x \in E: f(x) \in \{0, 1\}\} \end{array}$$

Reste à vérifier $\psi \circ \psi = \text{id}_E$

$$\text{et } \psi \circ \psi = \text{id}_E$$

Q2)

Rappel: $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$; $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \bar{B}$

$$G = \{ (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : A \cap B = \emptyset \}$$

$$= \bigcup_{B \in \mathcal{P}(E)} \{ (A, B) : A \subset \bar{B} \}$$

$$= \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{B \in \mathcal{P}_k(E)} \{ (A, B) : A \subset \bar{B} \}$$

Donc: $|G| = \sum_{k=0}^n \sum_{B \in \mathcal{P}_k(E)} \underbrace{|\mathcal{P}(\bar{B})|}_{2^{n-k}}$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 1^k$$

$$\boxed{|G| = 3^n}$$

Q3) $H = \{ (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3 : \underbrace{A \cup B \cup C}_{} = E \}$

(A, B, C)

$\varphi \downarrow$

(A, B)

$(A, B, \overline{A \cup B})$

$\uparrow \psi$

(A, B)

bien def

$G = \{ (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : A \cap B = \emptyset \}$

Soit $(A, B) \in G$

$\varphi \circ \psi (A, B) = \varphi (A, B, \overline{A \cup B}) = (A, B)$

done $\varphi \circ \psi = id_G$

De même $\psi \circ \varphi = id_H$

done φ bij et $|H| = |G| \stackrel{(\text{Q2})}{=} 3^n$

Suite 2nd approche de Q2.

Soit $f \in \{0, 1, 2\}^E$

$\varphi \circ \psi (f) = \varphi (\{x \in E : f(x) = 0\}, \{x \in E : f(x) \in \{0, 1\}\})$

$= \left| \begin{array}{c} E \longrightarrow \{0, 1, 2\} \\ x \mapsto \end{array} \right.$

0 si $x \in A = f^{-1}(\{0\})$

1 si $x \in B = f^{-1}(\{1\})$

2 si $x \in \bar{B}$

Soit $x \in E$

$$\psi \circ \psi(f)(x) = \begin{cases} 0 = f(x) & \text{si } x \in A = f^{-2}(\{0\}) \\ 1 = f(x) & \text{si } x \in B \setminus A = f^{-2}(\{1\}) \\ 2 = f(x) & \text{si } x \in \bar{B} = \overline{f^{-2}(\{0,1\})} \end{cases}$$

Ex 15: Q1) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

Q2) a)

Une répétition de n boules est modélisée par

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{I} 1:n \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I} 1,3 \mathbb{I} \\ i \longmapsto \left| \begin{array}{l} n^{\circ} \text{ du comportement où est} \\ \text{rangée la boule } n^{\circ} i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I} 1,3 \mathbb{I}^n$$

$\uparrow$
 $x_i = n^{\circ} \text{ du comportement de la boule } n^{\circ} i$

$$\Omega = \mathbb{I} 1,3 \mathbb{I}^n$$

$P = \text{proba uniforme sur } \Omega$

$$P(X=2) = \frac{|(X=2)|}{|\Omega|} = \frac{|(X=2)|}{3^n}$$

$$\begin{aligned} (X=2) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \{1, 2, 3\}^n : x_1 = \dots = x_n\} \\ &= \{(1, \dots, 1), (2, \dots, 2), (3, \dots, 3)\} \end{aligned}$$

Donc

$$P(X=2) = \frac{1}{3^{n-1}}$$

b) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$P(X=2) = \frac{1}{3^{n-1}}, \quad P(X=1) = ?, \quad P(X=0) = ?$$

On sait que $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$

$$P(X=1) = \frac{|(X=1)|}{3^n}$$

$$(X=1) = \left(\{(x_1, \dots, x_n) \in \{1, 2\}^n\} \setminus \{(1, \dots, 1), (2, \dots, 2)\} \right)$$

$$\cup \left(\{(x_1, \dots, x_n) \in \{1, 3\}^n\} \setminus \{(1, \dots, 1), (3, \dots, 3)\} \right)$$

$$\cup \left(\{(x_1, \dots, x_n) \in \{2, 3\}^n\} \setminus \{(2, \dots, 2), (3, \dots, 3)\} \right)$$

Donc

$$P(X=1) = \frac{3(2^n - 2)}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$

Donc $P(X=0) = 1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}$

$$P(X=0) = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$$

Q3) $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$

$$= 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$$

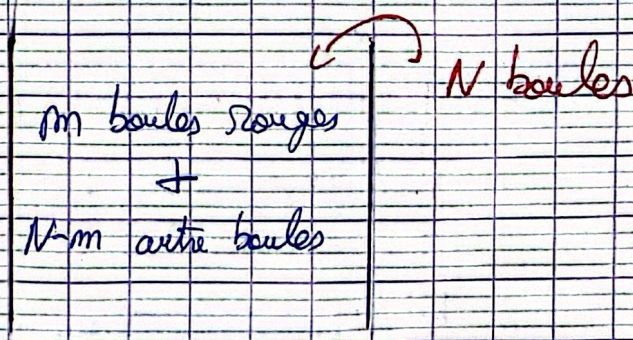
$$= \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}$$

$$= \frac{2^n}{3^{n-1}}$$

$$E(X) = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car } \left| \frac{2}{3} \right| < 1$$

Ex 17: $n, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq N$ et $n \leq N$

on se
prévoit
n sans remise



Q1) Loi de X

$$X(\Omega) \subset \{0, m\}$$

Un tirage est modélisé par une n -liste

$$(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$$

avec $\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad a_k = \begin{cases} 1 & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ tirée n'est pas rouge} \end{cases}$