

↳ Donc, pour tout $i \in [1, n]$, $u(e_i) = 0_E$

• Soit $x \in E$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = x$
Donc $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = 0_E$

Donc $u: \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto 0_E \end{cases}$ est un isomorphisme d'espace vectoriels car φ est linéaire et injective entre deux ev de même dim finie n^2

• $\varphi(\text{Id}_E) = \text{Mat}_B(\text{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = I_n$

↳ Donc φ est un isomorph. d'anneaux.

2) Montrons que si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Mat}_B(u \circ v) = \text{Mat}_B(u) \text{Mat}_B(v)$

• Soit $j \in [1, n]$, $[\text{Mat}_B(u \circ v)]_j$ contient les coordonnées de $u \circ v(e_j)$ dans B
i.e. : $u \circ v(e_j) = \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_B(u \circ v)]_{i,j} e_i$

$$\hookrightarrow v(e_j) = \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_B(v)]_{i,j} e_i$$

$$\hookrightarrow u(v(e_j)) = \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_B(u)]_{i,j} u(e_i) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n [\text{Mat}_B(u)]_{k,i} [\text{Mat}_B(v)]_{i,j} \right) e_k$$

$$= \sum_{k=1}^n [\text{Mat}_B(u) \text{Mat}_B(v)]_{k,j} e_k$$

• On conclut par récurrence.

Exercice 71:

1) Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^2 = -\text{Id}_E$. Montrons que pour tout a non nul, $(a, f(a))$ est libre.

Soit $a \in E$ non nul. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\lambda a + \mu f(a) = 0_E$

Alors, $f(\lambda a + \mu f(a)) = \lambda f(a) - \mu a = 0_E$

Ainsi $\mu(\lambda a + \mu f(a)) + \lambda(\lambda f(a) - \mu a) = \mu^2 f(a) + \lambda^2 f(a) = 0_E$

Donc $(\mu^2 + \lambda^2) f(a) = 0_E$

• f est bijective car $f \circ (-f) = \text{id}_E$ donc f injective et, comme $a \neq 0_E$, $f(a) \neq 0_E$

Donc $(\mu^2 + \lambda^2) \neq 0_E \mid (-f) \circ f = \text{id}_E$

Donc $\mu = \lambda = 0_E$ donc $(a, f(a))$ libre

2) Montrons que $\exists p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p)$ tq $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(\{a_i, f(a_i)\})$

• Soit $a_1 \in E$ non nul, alors $\text{Vect}(\{a_1, f(a_1)\})$ est de dim 2

Soit $a_2 \in E \setminus \text{Vect}(\{a_1, f(a_1)\})$

Montrons que $\text{Vect}(a_1, f(a_1)) \oplus \text{Vect}(a_2, f(a_2))$

↳ Soit $x \in \text{Vect}(a_1, f(a_1)) \cap \text{Vect}(a_2, f(a_2))$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in K$ tq $x = \lambda_1 a_1 + \mu_1 f(a_1) + \lambda_2 a_2 + \mu_2 f(a_2)$ (1)

Alors, $f(x) = \lambda_1 f(a_1) - \mu_1 a_1 + \lambda_2 f(a_2) - \mu_2 a_2$ (2)

Donc $\lambda_2^2 a_2 + \mu_2^2 a_2 = (\lambda_2^2 + \mu_2^2) a_2$ ($\lambda_2^2 - \mu_2^2$)

• Or $a_2 \in E \setminus \text{Vect}(\{a_1, f(a_1)\})$, $\lambda_2^2 + \mu_2^2 = 0$ (identification)

Donc $\lambda_2 = \mu_2 = 0$

• Supposons $(a_1, \dots, a_K)$ vecteurs de E construits tels que $K < p$

$\bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}(a_i, f(a_i)) = E_K$. Soit $a_{K+1} \in E \setminus E_K$, montrons que $\bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}(a_i, f(a_i)) \oplus \text{Vect}(a_{K+1}, f(a_{K+1})) = E_K$.
On démontre alors de manière analogue que $E_K \cap \text{Vect}(a_{K+1}, f(a_{K+1})) = \{0_E\}$.

3) On applique le déterminant à $f^2 = -\text{Id}_E$, alors $\det(f)^2 = (-1)^{\dim(E)}$
donc $\dim(E) \equiv 0 \pmod{2}$

Soit $a_1, \dots, a_p \in E$ non nuls tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(a_i, f(a_i))$
On pose $B = (a_1, f(a_1), \dots, a_p, f(a_p))$

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 64:

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'il existe p sev non triviaux $E_1, \dots, E_p$ et p scalaires 2 à 2 distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall x \in E_i, f(x) = \lambda_i x$. Montrons que $\sum_{i=1}^p E_i = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

(La technique avec la matrice de Vandermonde ne fonctionne pas car on aurait des vecteurs de vecteurs et non des vecteurs de scalaires)

Raisonnons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $P_p: " \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \Rightarrow x_1 = \dots = x_p = 0_E "$

Ini: $p = 1: x_1 = 0_E \Rightarrow x_1 = 0_E$ clair

Héxé: Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons P_p , montrons P_{p+1}

Soient $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in E_1 \times \dots \times E_{p+1}$ tq $\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0_E$:
donc $\sum_{i=1}^p x_i + x_{p+1} = 0_E$ (L_1)

donc $\sum_{i=1}^p f(x_i) + f(x_{p+1}) = f(0_E)$ } f linéaire

donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i + \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0_E$ (L_2)

donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^p \lambda_{p+1} x_i = 0_E$ ($L_2 - \lambda_{p+1} L_1$)

donc $\sum_{i=1}^p (\lambda_i - \lambda_{p+1}) x_i = 0_E$
 $\in E_i$

D'après (HR): $\forall i \in \{1, \dots, p\}, (\lambda_i - \lambda_{p+1}) x_i = 0_E \cdot 0_E$, les λ_i sont 2 à 2 distincts donc: $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \lambda_i \neq \lambda_{p+1} \Rightarrow x_i = 0_E$

En réutilisant L_1 , on a $x_{p+1} = 0_E$ donc P_{p+1}, ce qui conclut.

Exercice 47:

- Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Procédons par analyse-synthèse. (car on cherche ici, c'est le plus adapté)

1)

Analyse: Supposons $A \in \mathcal{C}_{i,j}$

• Alors $A E_{i,j} = E_{i,j} A$

Soit $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $[A E_{i,j}]_{k,l} = [E_{i,j} A]_{k,l}$

$$\text{Donc } \sum_{m=1}^n [A]_{k,m} [E_{i,j}]_{m,l} = \sum_{m=1}^n [E_{i,j}]_{k,m} [A]_{m,l}$$

$$\text{Donc } \sum_{m=1}^n [A]_{k,m} \delta_{i,m} \delta_{j,l} = \sum_{m=1}^n [A]_{m,l} \delta_{i,k} \delta_{j,m} \quad (\delta_{i,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases})$$

$$\text{Donc } [A]_{k,i} \delta_{j,l} = [A]_{j,l} \delta_{i,k} \quad (\text{on utilise les propriétés des symboles de Kronecker})$$

• Détermination de cas:

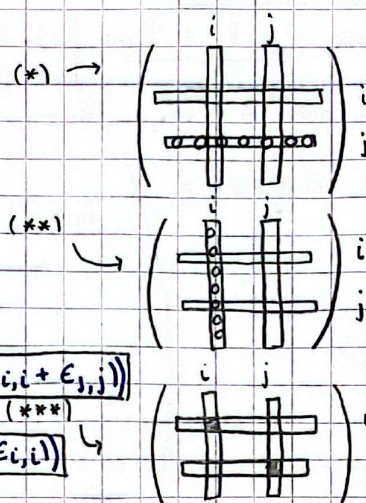
1^{er} cas: $l \neq j$ et $i = k$ (*): $[A]_{j,l} = 0$

2^e cas: $i \neq k$ et $j = l$ (**): $[A]_{k,i} = 0$

3^e cas: $l = j$ et $k = i$ (***): $[A]_{k,i} = [A]_{j,l}$
donc $[A]_{i,i} = [A]_{j,j}$

1^{er} sous-cas: Si $i \neq j$: $C_{i,j} = \text{Vect}((E_{k,l})_{\substack{k \neq j \\ l \neq i}} \cup (E_{i,i} + E_{j,j}))$

2^e sous-cas: Si $i = j$: $C_{i,j} = \text{Vect}((E_{k,l})_{\substack{k \neq i \\ l \neq i}} \cup (E_{i,i}))$



Synthèse: C'est clair car on a pas le temps / la flemme de vérifier.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, raisonnons par analyse-synthèse:

Analyse: Supposons $A \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \rightarrow$ ensemble des matrices qui commutent

• Alors, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $A E_{i,j} = E_{i,j} A$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

Comme A commute avec $E_{j,i}$, $[A]_{i,j} = 0$. Soit $i \neq 1$, A commute avec $E_{1,i}$, $[A]_{i,i} = [A]_{1,1}$

Donc $A = \underbrace{[A]_{i,i}}_{\in \mathbb{K}} I_n \in \text{Vect}(I_n)$

• $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \subset \text{Vect}(I_n)$

Synthèse: L'inclusion inverse est claire (I_n commute avec tout le monde)

Exercice 73:

$\mathcal{L}$ base de E

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \xrightarrow{f} & \mathcal{L}(E) \\ \downarrow \text{Mat}_{\mathcal{L}}(\cdot) & & \downarrow \text{Mat}_{\mathcal{L}}(\cdot) \\ \mathcal{M}_n & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{M}_n \\ \text{Mat}_{\mathcal{L}}(\cdot) \circ f \circ \text{Mat}_{\mathcal{L}}(\cdot)^{-1} & & \end{array}$$

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\Psi)$$

$$\begin{aligned} \Psi(M) &= \text{Mat}_{\mathcal{L}}(\text{Mat}_{\mathcal{L}}^{-1}(M) \circ u) \\ &= M \times \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{L}}(u)}_A \end{aligned}$$

$$\Psi \mid \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$$

$$M \mapsto MA$$

On note $x_0 = \text{rg}(A)$. Il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $J_{n,x} = PAQ^{-1}$

Notons $\Psi_{Q^{-1}} \mid \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ et $\Psi_P \mid \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ deux isomorphismes car P et Q sont inversibles

Alors $\Psi_P \circ \Psi \circ \Psi_{Q^{-1}} \mid \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(\Psi) = \text{rg}(\Psi)$

On note $B = (E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{n,n})$

$$\text{Mat}_B(\Psi) = \begin{pmatrix} J_{n,x}(\mathbb{R}) & & & \\ & J_{n,x}(\mathbb{R}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n,x}(\mathbb{R}) \end{pmatrix}$$

alors $\text{rg}(f) = nx$

2^e solution: $\dim(\text{Ker}(\Psi)) = ?$

Analyse: Soit $v \in \text{Ker}(\Psi)$

Alors $v \circ u = 0$

Donc $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$

Donc $\text{Ker}(\Psi) \subset A := \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)\}$

Synthèse: Soit $v \in A$, $v \circ u(E) = 0$

Donc $v \in \text{Ker}(\Psi)$

Donc $A \subset \text{Ker}(\Psi)$

Donc $A = \text{Ker}(\Psi)$

Soit S supplémentaire de $\text{Im}(u)$. Posons $\Psi \mid A \rightarrow \mathcal{L}(S, E)$

$$v \mapsto \begin{cases} S \rightarrow E \\ x \mapsto v(x) \end{cases}$$

linéarité: $(u, v, \lambda) \in A^2 \times \mathbb{K}$, $\Psi(u + \lambda v) = u|_S + \lambda v|_S = \Psi(u) + \lambda \Psi(v)$ donc Ψ linéaire

Injectivité: Soit $v \in \text{Ker}(\Psi)$

On a: $\forall x \in S, v(x) = 0$

Donc: $\forall x \in S \oplus \text{Im}(u) = E, v(x) = 0$ donc $v = 0$

Surjectivité : Soit $f \in \mathcal{L}(S, E)$

• Posons $\pi: \begin{cases} \text{Im}(u) \oplus S \rightarrow E \\ a+b \mapsto f(b) \end{cases}$. Soit $x \in \text{Im}(u)$, $\pi(x) = f(0) = 0$ car f est linéaire.

Donc $\boxed{\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(\pi)}$, $\pi \in A$. Donc $\dim(\text{Ker}(\pi)) = \dim(\mathcal{L}(S, E))$

Posons $n = \dim(E)$, $p = \text{rg}(u)$

Par théorème du rang :

$$\text{rg}(\pi) + \dim(\text{Ker}(\pi)) = \dim(E)$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(\pi) = n^2 - (n-p)n = \boxed{np}$$

Exercice 76 : Soit $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$

• Montrons que $\text{Ker}(A) = \{0\}$ par l'absurde

$\hookrightarrow$ Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tq $|x_{i_0}| = \min\{|x_i| \neq 0\}$.

$$AX = 0 \text{ donc } \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0$$

$$\text{donc } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} x_j = -a_{i_0,i_0} x_{i_0}$$

$$\text{donc } \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} x_j \right| = |a_{i_0,i_0}| |x_{i_0}|$$

$$\text{donc } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| |x_j| > \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0,j} x_j \right| = |a_{i_0,i_0}| |x_{i_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| |x_{i_0}|$$

$$\text{donc } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| |x_{i_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| |x_{i_0}| \rightarrow \text{absurde}$$

Donc $\text{Ker}(A) = \{0\}$