

TD - Révisions algèbre linéaire

Ex 9 Q1)

• $\mathcal{O}_{n(\mathbb{C})} \in \mathcal{D}_n$

• Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n$

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Alors: $\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda a_n + \mu b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n$

Autre approche:

- Montrer que les coeffs non diag sont nuls.
- $\mathcal{D} = \text{Vect}(E_{11}, \dots, E_{nn})$
 $\hat{=}$ ser comme ser engendré

Q2) Le cardinal de $F = (\mathcal{I}_n, D_1, \dots, D^{n-1})$

est $n = \dim(\mathcal{D}_n)$

Montrons que F est libre ; ce qui conclura.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i D^i = \mathcal{O}_{n(\mathbb{C})}$

Notons $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

Par théorème : pour tout $i \in \{1, n\}$

$$D^i = \begin{pmatrix} d_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^i \end{pmatrix}$$

On a : $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 d_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 d_n \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \lambda_{n-1} d_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1} d_n^{n-1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (0) \\ (0) & 0 \end{pmatrix}$$

Donc
$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i d_1^i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i d_n^i = 0 \end{cases}$$

Ainsi : $d_1, \dots, d_n$ sont racines distinctes de

$P = \lambda_{n-1} X^{n-1} + \dots + \lambda_0$ qui est de degré au plus $n-1$

Par conséquent : $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$; d'où $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

Autre approche: déterminant de Vandermonde

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

puis on conclut que la famille est libre car déterminant non nul.

Ex 27 Q1) • Pour α dans $\mathcal{L}(E)$, le neutre est Id_E

• Pour λ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le neutre est I_n

Q2) a) Linéarité

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\text{Calculons } \ell(\lambda u + \mu v) = \text{Mat}_B^B(\lambda u + \mu v)$$

$$= \text{Mat}_B^B(\lambda u) + \text{Mat}_B^B(\mu v)$$

$$= \lambda \text{Mat}_B^B(u) + \mu \text{Mat}_B^B(v)$$

(d'après les coordonnées de $\text{Mat}_B^B(u)$ dans une base)

Rappel: $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E
 $u \in \mathcal{L}(E)$

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{matrix} |e_1 \\ \vdots \\ |e_n \end{matrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $u(e_1) \qquad \dots \qquad u(e_n)$
 coordonnées de $u(e_i)$
 dans la base B

Injectivité: Montrons que $\text{Ker}(\varphi) = \mathcal{O}_{\mathcal{L}(E)}$

Soit $u \in \text{Ker}(\varphi)$

Alors, $\varphi(u) = \mathcal{O}_{\mathcal{L}(E)}$

Donc $\varphi(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |e_1 \\ \vdots \\ |e_n \end{matrix}$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $u(e_1) \qquad \dots \qquad u(e_n)$

Donc: pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $u(e_i) = 0_E$

Soit $x \in E$. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$

tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i$

Donc $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u(e_i) = 0_E$

Donc $u: \begin{array}{c} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto 0_E \end{array}$

Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
car φ est linéaire et injective entre deux espaces
vectoriels de même dimension finie n^2 .

Montrons que $\varphi(\text{Id}_E) = I_n$:

$$\text{Mat}_B(\text{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & (0) & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | e_1 \\ \vdots \\ | e_n \end{array}$$

$\uparrow$ $\text{Id}_E(e_1)$ $\uparrow$ $\text{Id}_E(e_n)$
 $\parallel$ $\parallel$
 e_1 e_n

b) Montrons que si $u, v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\text{Mat}_B(u \circ v) = \text{Mat}_B(u) \text{Mat}_B(v)$$

- Les 2 matrices ont le même format $(n \times n)$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$[\text{Mat}_B(u \circ v)]_{\cdot j}$ contient les coordonnées de $u \circ v(e_j)$ dans B ;

ie. $u \circ v(e_j) = \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_B(u \circ v)]_{i,j} e_i$

- $v(e_j) = \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_B(v)]_{i,j} e_i$

$$u(v(e_j)) = \sum_{i=1}^n [\text{Mat}_B(u)]_{i,j} \boxed{u(e_i)}$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^n [\text{Mat}_B(u)]_{k,i} e_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n [\text{Mat}_B(u)]_{k,i} [\text{Mat}_B(v)]_{i,j} \right) e_k$$

$$[\text{Mat}_B(u) \text{Mat}_B(v)]_{k,j}$$

Ce qui conclut la démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Raisonnons par récurrence sur pgm la propriété suivante:
 Hp: " $\text{Mat}_B(u^p) = \text{Mat}_B(u)^p$ "

Initialisation: pour $p=0$.

$$\varphi(\text{Id}_E) = \text{Id}_n \text{ par Q1.}$$

Hérédité: Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons H_p vraie.

Montrons que H_{p+1} est vraie.

$$\text{Mat}_B(u^{p+1}) = \text{Mat}_B(u^p \circ u)$$

$$= \text{Mat}_B(u^p) \text{Mat}_B(u) \quad (\text{d'après ce qu'on a démontré auparavant})$$

$$= \text{Mat}_B(u)^p \text{Mat}_B(u) \quad (\text{H.P.})$$

$$= \text{Mat}_B(u)^{p+1}$$

H_{p+1} est vraie.

Par principe de récurrence.

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \text{Mat}_B(u^p) = \text{Mat}_B(u)^p.$$

Ex 71 Q1) f est bijective car $f \circ f^{-1} = \text{id}_E$
 $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$

Soit $a \in E$ vecteur non nul.

Soit $\lambda, \mu \in K$ tel que $\lambda a + \mu f(a) = 0_E$ ($\frac{1}{\lambda}$

On applique f : $\lambda f(a) - \mu a = 0_E$ (λ_2)

$\mu \lambda_1 + \lambda \lambda_2$ fournit: $\lambda^2 f(a) + \mu^2 f(a) = 0_E$

ceci: $(\lambda^2 + \mu^2) f(a) = 0_E$

Par injectivité de f et comme $a \neq 0_E$,

On a: $f(a) \neq 0_E$.

Donc $\underbrace{\lambda^2}_{\neq 0} + \underbrace{\mu^2}_{\neq 0} = 0$

D'où: $\boxed{\lambda = \mu = 0.}$

(Q3 avant Q2) Q3) En appliquant le déterminant à $f^2 = -\text{Id}_E$,

On obtient $\underbrace{\det(f)}_{\neq 0}^2 = (-1)^{\dim(E)}$

Donc $\boxed{\dim(E) \equiv 0 \pmod{2}}$

Notons $2p$ la dimension de E ($p \in \mathbb{N}^*$)

Q2) Soit $a_1 \in E$ non nul alors $\text{Vect}(a_1, f(a_1))$ est de dim 2.

Soit $a_2 \in E \setminus \text{Vect}(a_1, f(a_1))$ (*)

Montrons que $\text{Vect}(a_1, f(a_1))$ et $\text{Vect}(a_2, f(a_2))$ sont
en somme directe

Soit $x \in \text{Vect}(a_1, f(a_1)) \cap \text{Vect}(a_2, f(a_2))$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in K$ tel que

$$x = \lambda_1 a_1 + \mu_1 f(a_1) = \lambda_2 a_2 + \mu_2 f(a_2) \quad (L_1)$$

En composant par f :

$$f(x) = \lambda_1 f(a_1) - \mu_1 a_1 = \lambda_2 f(a_2) - \mu_2 a_2 \quad (L_2)$$

$\lambda_2 L_1 - \mu_2 L_2$ fournit:

$$\begin{aligned} & \lambda_2 (\lambda_1 a_1 + \mu_1 f(a_1)) - \mu_2 (\lambda_1 f(a_1) - \mu_1 a_1) \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\in \text{Vect}(a_2, f(a_2))} \\ &= \lambda_2^2 a_1 + \mu_2^2 a_1 = \underbrace{(\lambda_2^2 + \mu_2^2)}_{\in \mathbb{R}^+} a_1 \end{aligned}$$

Comme (*), $\lambda_2^2 + \mu_2^2 = 0$

Donc $\lambda_2 = \mu_2 = 0$

Supposons $(a_1, \dots, a_k)$ des vecteurs de E
 Construis tel que $k < p$

$$\bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}(a_i, f(a_i)) = E_k$$

Soit $a_{k+1} \in E \setminus E_k$

Montrons que : $\underbrace{\bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}(a_i, f(a_i))}_{E_k} \oplus \text{Vect}(a_{k+1}, f(a_{k+1})) = E_{k+1}$

De manière analogue, on démontre

$$E_k \cap \text{Vect}(a_{k+1}, f(a_{k+1})) = \{0\}$$

Reprise de QB (la fin)

Soit $a_1, \dots, a_p \in E$ non nuls tel que

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(a_i, f(a_i))$$

$$B = (a_1, f(a_1), \dots, a_p, f(a_p))$$

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}} \end{pmatrix} \begin{matrix} (a_1) \\ (a_1) \\ \vdots \\ (a_p) \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow a_1 \\ \uparrow f(a_1) \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \uparrow a_p \\ \uparrow f(a_p) \end{matrix}$

$\begin{matrix} f(a_1) & f^2(a_1) & \dots & f(a_p) & f^2(a_p) \end{matrix}$

E251

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Comme $I_3 N = N I_3$, on peut appliquer le binôme de Newton.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k}$$

$$A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$$

Def: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} + n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 74 Rappel: F ser de $K[X]$
 F stable par D s: $\forall P \in F \quad \frac{D(P)}{P} \in F$

Exemple: $\{0\}$; $K[X]$, les $K_n[X]$

Raisonnons par analyse-synthèse:

(A) Soit $F \neq \{0\}$ un ser de $K[X]$ stable par dérivation.

Soit $P \in F \setminus \{0\}$

Soit $d = \deg(P) \in \mathbb{N}$

Montrons que $K_d[X] \subset F$.

On a: $P, P', \dots, P^{(d)} \in F$

donc: $\text{Vect}(P, \dots, P^{(d)}) \subset F$

forme une base de $K_d[X]$
 par thm des degrés échelonnés.

A finir.