

TD – Révisions d'algèbre linéaire

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps (commutatif).

Exercice 1 ★☆☆ — Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

$$F_1 = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : u \text{ converge vers } 1\} \quad F_2 = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : u \text{ est bornée}\} \quad F_3 = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : u^2 \text{ converge}\}$$

sevSuites

Exercice 2 ★☆☆ — Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

$$\begin{aligned} F_1 &= \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\} & F_2 &= \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f \text{ est uniformément continue}\} \\ F_3 &= \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f \text{ est majorée}\} & F_4 &= \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f \text{ est lipschitzienne}\} \end{aligned}$$

sevFonctions

Exercice 3 ★★☆☆ — L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Si F, G, H sont trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E tels que $F + G = F + H$, alors $G = H$.

nonSimplificationSommeSev

Exercice 4 ★★☆☆ — Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . Démontrer que :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$$

A-t-on nécessairement égalité ?

nonDistributiviteSommeIntersectionSev

Exercice 5 ★☆☆ — Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ sont-elles libres ? génératrices de $\mathbf{R}^3$?

$$\begin{aligned} \underline{e} &= (e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (1, 1, 1), e_3 = (1, 0, 0)) & \underline{f} &= (f_1 = (1, 1, 0), f_2 = (1, 0, 1), f_3 = (2, 0, 1)) \\ \underline{g} &= (g_1 = (-1, 0, 1), g_2 = (1, -1, 1), g_3 = (1, 0, 0), g_4 = (2, 3, 4)) \end{aligned}$$

famillesRemarquablesR3

Exercice 6 ★★☆☆ — Soient f_1, f_2, f_3 les trois fonctions définies par :

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right. \quad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x) \end{array} \right. \quad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos^3(x) \end{array} \right. .$$

La famille (f_1, f_2, f_3) de vecteurs de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ est-elle libre ?

familleFinieRemarquableFonctions

Exercice 7 ★☆☆ — Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . Posons :

$$f_1 = e_1 \quad , \quad f_2 = e_1 + e_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad f_n = e_1 + \dots + e_n .$$

La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est-elle libre ?

famillesFiniesRemarquablesAbstrait

Exercice 8 ★★☆☆ — Soient E, F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E .

1. Démontrer que si f est injective, alors la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.
2. La réciproque est-elle vraie ?

famillesLibresApplicationLineaireInjective

Exercice 9 ★☆☆ — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Démontrer que $\mathcal{D}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Soit $D \in \mathcal{D}_n$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Démontrer que la famille $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{D}_n$.

ccinpbasesMatricesDiagonales

Exercice 10 ★★☆☆ — Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Nous définissons, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction e_k par :

$$e_k \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\\ x \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \longmapsto x^{a_k} \end{array}.$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est-elle libre ?

liberteFamilleFinieFonctionsPuissance

Exercice 11 ★☆☆ — Déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants.

$$F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$$

$$F_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \right\}$$

baseSupplementaireSevR4

Exercice 12 ★☆☆ — Soient $E_1 = \text{Vect}(v_1 = (1, -1, 0, 1), v_2 = (0, 2, 1, 0))$ et $E_2 = \text{Vect}(w_1 = (0, 6, -1, 4), w_2 = (3, 3, 1, 5))$.

1. Caractériser $E_1 \cap E_2$.
2. Donner une base de $E_1 + E_2$.
3. Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbf{R}^4$.

intersectionSommeSupplementaireSevR4

Exercice 13 ★☆☆ — Notons P (respectivement I) l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ paires (respectivement impaires). Démontrer que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = P \oplus I$.

fonctionsPariesImpairesSupplementaires

Exercice 14 ★★☆☆ — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ notons :

$$F_k := \{P \in \mathbf{R}_n[X] : \forall \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}, P(\ell) = 0\}.$$

Démontrer que $\mathbf{R}_n[X] = \bigoplus_{k=0}^n F_k$.

decompositionRnXSommeDirecteDroites

Exercice 15 ★☆☆ — Soient $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, $(F_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ deux familles de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad E_i \subset F_i \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i.$$

Démontrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_i = F_i$.

sommeDirecteAbstraitEgaliteSev

Exercice 16 ★☆☆ — Soient E, F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E .

1. Démontrer que $f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n f(E_i)$.

2. Supposons que f est injective et que $\sum_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Démontrer que $\sum_{i=1}^n f(E_i) = \bigoplus_{i=1}^n f(E_i)$.

sommeDirecteAbstraitInjectiviteApplicationLineaire

Exercice 17 ★☆☆ — Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E tels que :

$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \quad \text{et} \quad F' \subset G.$$

Démontrer que $F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$.

ccinSommeDirecte2SommeDirecte3Abstrait

Exercice 18 ★☆☆ — Caractériser les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants à l'aide d'une équation cartésienne.

$$F_1 = \text{Vect}((1, 1, 1, 1)) \quad F_2 = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -1)) \quad F_3 = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 0, 0, 1)) .$$

On pourra munir $\mathbf{R}^4$ de son produit scalaire usuel et prendre appui sur l'identité $F = (F^\perp)^\perp$, valide pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$.

equationCartesienneSevR4

Exercice 19 ★☆☆ — Soient A et B deux parties d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . Démontrer que :

$$\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) = \text{Vect}(A \cup B) .$$

et en déduire une nouvelle démonstration d'un résultat du cours.

sommeSevEngendreAbstrait

Exercice 20 ★☆☆ — Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + y + z + t = 0\} \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + y + z + t = x - y + 2z - 3t = 0\} .$$

baseDimensionSevR4

Exercice 21 ★☆☆ — Justifier que $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

evReelVersusEvComplexeCasC

Exercice 22 ★☆☆ — Soit E un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Démontrer que E est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $2n$.

evReelVersusEvComplexeCasGeneral

Exercice 23 ★☆☆ — Démontrer que le $\mathbf{K}$ -espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

espacePolynomesDimensionInfinie

Exercice 24 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Démontrer que, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la famille $(e_1 + e_i, e_2, e_3, \dots, e_n)$ est une base de E .
2. Déterminer les endomorphismes de E dont la matrice est diagonale dans toute base de E .

ccinPEndomorphismeMatriceTouteBaseDiagonale

Exercice 25 ★★☆☆ — Soient E, F deux $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m , $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_m)$ une base de F .

1. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$. Justifier qu'il existe une unique application linéaire $u_{i,j} \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} f_j.$$

2. Démontrer que la famille $(u_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une base de $\mathcal{L}(E, F)$. Qu'en déduire pour $\mathcal{L}(E, F)$?

baseEvApplicationsLineaires

Exercice 26 ★☆☆ — Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbf{K}$.

1. Démontrer que :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{K}^3$ et on pose, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
 - (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbf{K}_2[X]$.
 - (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
3. Soit $P \in \mathbf{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
4. Application : on se place dans $\mathbf{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

banqueCcinp90

Exercice 27 ★☆☆ — Supposons E de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbf{K}$.

1. Préciser l'élément neutre de $\mathcal{L}(E)$ pour la loi $\circ$ et l'élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour la loi $\times$.
2. Étant donnée une base $\mathcal{B}$ de E , notons φ l'application définie par :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$$

- (a) Démontrer que φ est un isomorphisme d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- (b) Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^p$.

ccinPEndomorphismeAnneauxEndomorphismesMatrices

Exercice 28 ★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. et φ une forme linéaire non nulle sur E . Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}(a)$.

noyauFormeLineaireNonNulleHyperplan

Exercice 29 ★☆☆ — Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbf{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbf{R}^3$ sur P parallèlement à D . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

banqueCcinp71

Exercice 30 ★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et p un projecteur de E .

1. Démontrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.
2. Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$, f est-il un projecteur de E ?

projecteurDecompositionEv

Exercice 31 ★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et s une symétrie de E .

1. Démontrer que $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.
2. Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$, u est-il une symétrie de E ?

symetrieDecompositionEv

Exercice 32 ★★☆☆ — Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \quad f(M) = AM.$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?

banqueCcinp60

Exercice 33 ★★☆☆ — Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\lambda, \mu \in \mathbf{C}^*$ tels que :

$$\lambda \neq \mu, \quad I_n = A + B, \quad M = \lambda A + \mu B, \quad M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$$

1. Calculer $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_n$. En déduire que M est inversible, puis exprimer M^{-1} .
2. Démontrer que A et B sont des projecteurs.

ccinPolynomeAnnulateurDegre2ProjecteursMatrices

Exercice 34 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 4u + 3\text{id}_E = 0$.

1. Démontrer que u est inversible et exprimer u^{-1} en fonction de u .
2. Démontrer que $E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 3\text{id}_E)$.

polynomeAnnulateurDegre2DecompositionEspaceAbstrait

Exercice 35 ★☆☆ — Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que :

$$E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \implies \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2).$$

2. (a) Démontrer que :

$$\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2).$$

- (b) Démontrer que :

$$\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \implies E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f).$$

banqueCcinp64

Exercice 36 ★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de nilindice p .

1. Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ soit libre.
2. Si maintenant on suppose E de dimension finie, comparer l'indice de nilpotence p de f et de la dimension de E .

majorationNilindice

Exercice 37 ★☆☆ — Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente de nilindice p . Démontrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.

inversibiliteIdentitePlusNilpotente

Exercice 38 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. L'identité $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g \circ f)$ est-elle nécessairement vraie ?

rangComposee

Exercice 39 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que :

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

ccinEncadrementRangSomme

Exercice 40 ★☆☆ — Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Déterminer le rang de f .

rangEndomorphismeNilpotentR3

Exercice 41 ★☆☆ — Calculer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

rangMatrices3x3

Exercice 42 ★★☆☆ — Une matrice de rang r est-elle nécessairement semblable à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

nonNecessairementSemblableMatriceJordan

Exercice 43 ★★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe $(P, Q) \in \operatorname{GL}_n(\mathbf{R})^2$ vérifiant $B = PAQ$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A . Existe-t-il nécessairement une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$?

semblablesVersusEquivalentes

Exercice 44 ★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A^2 = A$. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que A soit semblable à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

reductionMatriceProjecteur

Exercice 45 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie) et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = \operatorname{id}_E$. Démontrer que :

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f) \quad , \quad \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g) \quad , \quad E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$$

ccinEndomorphismesAbstraitDecompositionSommeDirecte

Exercice 46 ★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et $(A, B) \in \mathcal{T}_n(\mathbf{K})^2$, où $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ qui sont triangulaires supérieures. Démontrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[AB]_{i,i} = [A]_{i,i} \times [B]_{i,i}$.

coefficientsDiagonauxProduitMatricesTriangulaires

Exercice 47 ★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$.

1. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, déterminer $C_{i,j} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) : AE_{i,j} = E_{i,j}A\}$.
2. En déduire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

centreMnK

Exercice 48 ★☆☆ — Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 14 & 7 & -4 \\ 7 & -21 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse le cas échéant.

inversibiliteInverseMatrice3x3

Exercice 49 ★★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Démontrer que A est inversible si et seulement si, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ non nulle, $AX \neq 0$.

cnsInversibiliteMatriceNoyau

Exercice 50 ★☆☆ — Pour tout couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, notons $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et posons :

$$F = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ?
2. Posons :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & M(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \end{array} \right.$$

- (a) Démontrer que φ est un isomorphisme de $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux.
- (b) Pour tout couple $(a, b) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})^2$ et tout entier naturel n , calculer $M(a, b)^n$.

ccinpRealisationComplexesMatrices2x2

Exercice 51 ★☆☆ — Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.. Déterminer A^n , pour tout $n \in \mathbf{N}$.

puissancesMatriceTriangulaire3x3

Exercice 52 ★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$. Démontrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

traceProduitMatrices

Exercice 53 ★★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Résoudre, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'équation $X = \operatorname{tr}(X)A + B$.

ccinpEquationMatricielleTraceXFoisAPlusB

Exercice 54 ★☆☆ — Démontrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

transposeeProduitMatrices

Exercice 55 ★★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, notons f_A la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad f_A(M) = \text{tr}(AM) .$$

1. Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^* \\ A & \longmapsto & f_A \end{array} \right.$$

est linéaire et injective.

2. Démontrer que, pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\varphi = f_A$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$ telle que :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad \varphi(MN) = \varphi(NM) .$$

Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\varphi = \lambda \text{tr}$.

ccinpRepresentationFormesLineairesMnKFormesLineairesCentrales

Exercice 56 ★☆☆ — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ tel que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

ccinpMatricesInversiblesMnZ

Exercice 57 ★★☆☆ — Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . Posons :

$$f_1 = e_1 + e_2 \quad , \quad f_2 = e_2 + e_3 \quad , \quad \dots \quad , \quad f_{n-1} = e_{n-1} + e_n \quad , \quad f_n = e_n + e_1$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ soit libre.

liberteFamilleFinieAbstrait

Exercice 58 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs non nuls de E . Supposons qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad f(x_i) = \lambda_i x_i .$$

Démontrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

liberteFamilleFinieVecteursPropres

Exercice 59 ★★☆☆ — Posons $P_0 := 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n := \prod_{i=0}^{n-1} (X - i)$. Démontrer que $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{R}[X]$.

liberteFamilleInfiniePolynomes

Exercice 60 ★★☆☆ — Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, notons e_n et c_n les fonctions définies par :

$$e_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & e^{inx} \end{array} \right. \quad c_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \cos(nx) \end{array} \right.$$

Démontrer que la famille $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est libre dans le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{R}}$, puis que la famille $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

liberteFamilleInfinieCosinusDilate

Exercice 61 ★★☆☆ — Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons f_k la fonction définie par :

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos^k(x) \end{array} \right.$$

La famille $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$?

liberteFamilleInfiniePuissancesCosinus

Exercice 62 ★★☆ — Soit $A \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non constant. Démontrer que $F = \{AP : P \in \mathbf{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{K}[X]$.

supplementairesEnsembleMutiplesPolynome

Exercice 63 ★★☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts.

1. Démontrer que $F = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_n) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
2. Donner un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

supplementairesEnsembleFonctionsNullesNombreFinisPoints

Exercice 64 ★★☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'il existe p sous-espaces vectoriels non triviaux $E_1, \dots, E_p$ et p scalaires deux-à-deux distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \forall x \in E_i \quad f(x) = \lambda_i x.$$

Démontrer que $\sum_{i=1}^p E_i = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

sommeDirecteSousEspacesPropres

Exercice 65 ★★☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de nilindice $p \in \mathbf{N}^*$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe un sous-espace vectoriel F_k tel que $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k$.
2. Démontrer que $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$.
3. Démontrer que la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe de la question 2 est triangulaire supérieure. Que valent les coefficients diagonaux ?

trigonalisationEndomorphismeNilpotent

Exercice 66 ★★☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ soit liée. Démontrer que f est une homothétie.

endomorphismesVecteursColineairesImages

Exercice 67 ★★☆ — Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E . Démontrer que φ et ψ sont colinéaires si et seulement si elles ont même noyau.
2. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ et ψ des formes linéaires sur E . Démontrer que :

$$\psi \in \text{Vect}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \iff \bigcap_{k=1}^n \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\psi).$$

noyauxFormesLineairesAppartenanceSevEngendre

Exercice 68 ★★☆ — Soient E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, F un sous-espace vectoriel de E distinct de E .

1. Démontrer que F peut s'obtenir comme une intersection finie d'hyperplans.
2. Quel est le nombre minimal d'hyperplans nécessaire pour obtenir F ?

sevVersusIntersectionHyperplans

Exercice 69 ★★☆ — Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E .

1. Supposons que F_1 et F_2 possèdent un supplémentaire commun. Démontrer qu'ils sont isomorphes.
2. Si F_1 et F_2 sont isomorphes, ont-ils nécessairement un supplémentaire commun ?

deuxSevMemeDimensionExistenceSupplementaireCommun

Exercice 70 ★★☆☆ — Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux-à-deux distincts. Démontrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t) \, dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k) .$$

casParticulierTheoremeRieszRnX

Exercice 71 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{R}$ -espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 = -\text{id}_E$.

1. Démontrer que pour tout vecteur a non nul, la famille $(a, f(a))$ est libre.
2. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ et p vecteurs $a_1, \dots, a_p$ tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(\{a_i, f(a_i)\}) .$$

3. Démontrer que E est de dimension paire et trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est « simple ».

reductionEndomorphismeCarreMoinsId

Exercice 72 ★★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Comparer le rang de A et le rang de sa comatrice.

rangComatrice

Exercice 73 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer le rang de l'application linéaire :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & v \circ u . \end{array} \right.$$

rangTransposeeEndomorphisme

Exercice 74 ★★☆☆ — Ici, $\mathbf{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$. Soit D l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$:

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' . \end{array} \right.$$

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$ stables par D .

sousEspacesPolynomesStablesDerivation [corrigé]

Exercice 75 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ tel que :

$$P(u) := \sum_{k=0}^n a_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad P'(0) \neq 0 .$$

Démontrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont en somme directe.

polynomeAnnulateurSommeDirecteImageNoyau

Exercice 76 ★★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \text{Mat}_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonalement dominante, i.e. telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| .$$

Démontrer que A est inversible.

matricesDiagonalementDominantes

Exercice 77 ★★☆☆ — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$.

1. Justifier que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont des entiers relatifs.
2. Supposons $\det(A)$ et $\det(B)$ premiers entre eux. Démontrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ telles que $UA + VB = I_n$.

versionMatricielleIdentiteBezout

Exercice 78 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère les deux propriétés (P1) et (P2) définies par :

- (P1) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale ;
 (P2) tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par u .
 Démontrer que les propriétés (P1) et (P2) sont équivalentes.

critereDiagonalisabiliteExistenceSupplementaireStable

Exercice 79 ★★☆☆ — Soient $n \in \mathbf{N}$, $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré n et $x_0, x_1, \dots, x_n$ des complexes deux à deux distincts. On définit, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = P(X + x_k)$. Prouver que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

baseCnXIssuePolynomeTranslationVariable

Exercice 80 ★★☆☆ — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un nombre algébrique, i.e. racine d'un polynôme non nul, à coefficients rationnels. Posons :

$$\mathbf{Q}[\alpha] := \text{Vect}_{\mathbf{Q}}(\{\alpha^k : k \in \mathbf{N}\}) .$$

1. Démontrer que l'entier $n := \min \{\deg(P) : P \in \mathbf{Q}[X] \setminus \{0\} \text{ et } P(\alpha) = 0\}$ est bien défini.
2. Démontrer que $(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ est une base du $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel $\mathbf{Q}[\alpha]$.
3. Démontrer que $\mathbf{Q}[\alpha]$ est un corps.

corpsEngendreNombreAlgebrique

Exercice 81 ★★☆☆ — Notons $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que la famille $(\ln(p_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est libre dans le $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel $\mathbf{R}$.

xFamilleLibreLogarithmesNombresPremiers

Exercice 82 ★★☆☆ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(E)$. Posons :

$$E^G = \{x \in E : \forall g \in G \quad g(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes par tous les éléments de G . Démontrer que :

$$\dim(E^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g) .$$

ensDimensionSevPointsFixesGroupeAutomorphismes

Exercice 83 ★★☆☆ — Soient $a_0, \dots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts. Notons $f_0, \dots, f_n$ les formes linéaires sur $\mathbf{K}_n[X]$ définies par :

$$\forall P \in \mathbf{K}_n[X] \quad f_i(P) = P(a_i) .$$

Démontrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de $(\mathbf{K}_n[X])^*$ et trouver sa base antéduale.

baseAntedualeFormesLineairesEvaluationsKnX

Exercice 84 ★★★ — On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 & \xrightarrow{f_2} & E_3 & \xrightarrow{f_3} & E_4 & \xrightarrow{f_4} & E_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ F_1 & \xrightarrow{g_1} & F_2 & \xrightarrow{g_2} & F_3 & \xrightarrow{g_3} & F_4 & \xrightarrow{g_4} & F_5 \end{array}$$

formé de $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels et d'applications linéaires. On suppose que le diagramme est commutatif, i.e. :

$$h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1 \quad ; \quad h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2 \quad ; \quad h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3 \quad ; \quad h_5 \circ f_4 = g_4 \circ h_4$$

et que les deux lignes sont exactes, i.e. :

$$\text{Ker}(f_2) = \text{Im}(f_1) \quad ; \quad \text{Ker}(f_3) = \text{Im}(f_2) \quad ; \quad \text{Ker}(f_4) = \text{Im}(f_3)$$

$$\text{Ker}(g_2) = \text{Im}(g_1) \quad ; \quad \text{Ker}(g_3) = \text{Im}(g_2) \quad ; \quad \text{Ker}(g_4) = \text{Im}(g_3).$$

Montrer que :

$$h_1, h_2, h_4, h_5 \text{ isomorphismes} \implies h_3 \text{ isomorphisme}.$$

lemme des cinq

Exercice 85 ★★★ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ et n endomorphismes nilpotents $u_1, \dots, u_n$ de E commutant deux à deux. Démontrer que $u_1 \circ \dots \circ u_n = 0$.

ensCompositionsEndomorphismesNilpotentsCommutent

Exercice 86 ★★★ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, F un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $m \in \mathbf{N}^*$ et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que $\text{rg}(g) \leq \text{rg}(f)$ si et seulement s'il existe $h \in \text{GL}(F)$ et $k \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h \circ g = f \circ k$.

xInegaliteRangEgaliteCompositionEndomorphismes

Exercice 87 ★★★ — Soient E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que les suites $(\text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbf{N}}$ et $(\text{Im}(u^k))_{k \in \mathbf{N}}$ sont d'abord strictement monotones pour l'inclusion, puis constantes à partir d'un certain rang $p \leq n$.
2. Démontrer que la suite $(\dim \text{Ker}(u^{k+1}) - \dim \text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbf{N}}$ est décroissante.
3. Démontrer que $E = \text{Ker}(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$.
4. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où N est une matrice carrée nilpotente et A une matrice carrée inversible.

xLemmeFitting

Exercice 88 ★★★ — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et une application $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que $f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{K})}) = 0$, $f(I_n) = 1$ et :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(A) \neq 0$ si et seulement si $A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$.

xCaracterisationInversibiliteMatriceFormeMultiplicative

Exercice 89 ★★★ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de trace nulle.

1. Montrer que A est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.
2. Montrer qu'il existe deux matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A = BC - CB$.

xMatriceTraceNulleCrochetLie

Exercice 90 ★★★ — Soit un entier $n \geq 2$. Démontrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient une matrice inversible.

hyperplanMnKMatriceInversible

Un corrigé de l'exercice 74

(a) Un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{K}[X]$ est stable par D si :

$$\forall P \in F \quad D(P) = P' \in F .$$

(b) Observons que les sous-espaces vectoriels $\{0_{\mathbf{K}[X]}\}$, $\mathbf{K}[X]$ et les $\mathbf{K}_n[X]$ ($n \in \mathbf{N}$) sont stables par D . Nous allons démontrer que ce sont les seuls.

(c) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$, distinct de $0_{\mathbf{K}[X]}$ et stable par D . Considérons un polynôme $P \in F \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$. En notant $d := \deg(P) \in \mathbf{N}$, il vient :

$$P, P', \dots, P^{(d)} \in F .$$

Par minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré, nous en déduisons que :

$$\text{Vect}(P, P', \dots, P^{(d)}) \subset F .$$

D'après le théorème des degrés échelonnés :

$$\text{Vect}(P, P', \dots, P^{(d)}) = \mathbf{K}_d[X] .$$

Ainsi :

$$\mathbf{K}_d[X] \subset F .$$

(d) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$, distinct de $0_{\mathbf{K}[X]}$ et stable par F . Introduisons l'ensemble :

$$A := \{\deg(P) : P \in F \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}\}$$

des degrés des polynômes non nuls de F , qui est une partie non vide de $\mathbf{N}$. Scindons l'étude en deux parties suivant que la partie A soit majorée ou non.

— Supposons la partie A majorée. Par bon ordre, l'entier naturel :

$$n := \max(A)$$

est bien défini. Nécessairement $F \subset \mathbf{K}_n[X]$ et, par définition de n , il existe un polynôme $P \in F \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$ tel que $n = \deg(P)$. D'après (c), $\mathbf{K}_n[X] \subset F$. Finalement $F = \mathbf{K}_n[X]$.

— Supposons la partie A non majorée. Considérons un polynôme $P \in F \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$. Comme l'entier naturel $\deg(P)$ ne majore pas A , il existe $d \in A$ tel que :

$$\deg(P) < d .$$

Puisque $d \in A$, il existe un polynôme $Q \in F \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$ tel que $\deg(Q) = d$. D'après (c) :

$$P \in \mathbf{K}_{\deg(P)}[X] \subset \mathbf{K}_d[X] \subset F .$$

Le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{K}[X]$ contient tous les polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$. Il s'agit donc de $\mathbf{K}[X]$ lui-même.