

Exercice 12 : (Classique)

- 1) Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang n . Montrons que $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $u^2 = \lambda u$.

1^{ère} solution : Voie matricielle

- Par théorème du rang, $\text{Ker}(u)$ hyperplan de E (car de dim $n-1$)
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(u)$ et $e_n \in E$ tel que $B = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ (théorème de la base incomplète)

Alors $\text{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{n-1} & \underbrace{\begin{matrix} u(e_n) \\ C \\ \lambda \end{matrix}}_1 \end{array} \right)^{n-1}$ donc $\text{Mat}_B(u)^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-1} & \lambda C \\ \hline 0 & \lambda^2 \end{array} \right)$

$= \lambda \text{Mat}_B(u)$

- Comme $\text{Mat}_B(u)$ isomorphe d'anneaux de $\mathbb{K}$ -alg de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $\text{Mat}_B(u^2) = \text{Mat}_B(\lambda u)$ d'où $\boxed{u^2 = \lambda u}$

2^{ème} solution :

- $\text{Im}(u)$ est de dimension 1. Soit (y_0) une base de $\text{Im}(u)$, $u(y_0) \in \text{Im}(u)$
Donc, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $u(y_0) = \lambda y_0$
- Soit $x \in E$, $u(x) \in \text{Im}(u)$. $\exists k \in \mathbb{K}$, $u(x) = k y_0$
 $u(u(x)) = u(k y_0) = k u(y_0) = k \lambda y_0 = \lambda (k y_0) = \lambda u(x)$

3^{ème} solution : Voie matricielle (2)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\gamma(A) = 1$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . Donc, $\dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_n)) = 1$
 $\rightarrow \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- TBE: $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tq (C_{i_0}) base de $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$
 $\forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$, $\exists a_i \in \mathbb{K}$, $C_i = a_i C_{i_0}$
- $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i_0-1} \\ a_{i_0+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 C_{i_0} & a_2 C_{i_0} & \dots & C_{i_0} & \dots & a_n C_{i_0} \end{pmatrix}$
 $= C_{i_0} (a_1, \dots, 1, \dots, a_n) = C_{i_0} X^T$
- $A^2 = C_{i_0} \underbrace{X^T C_{i_0}}_{\lambda \in \mathbb{K}} X^T = \lambda C_{i_0} X^T = \lambda A$ (Toute matrice de rang 1 est produit d'un $\vec{v}$ colonne par un $\vec{v}$ ligne)

- 2) Soit $y_0 \in \text{Im}(u) \setminus \{0_E\}$, $\exists x \in E$ tel que $u(x) = y_0$
 $u(y_0) = u(u(x)) = \lambda u(x) = \lambda y_0$ donc $\boxed{\lambda \text{ vp de } u}$

$\hookrightarrow$ À savoir faire/présenter absolument

$\hookrightarrow$ b'oubliez le ventre et connaître les questions de cours / démo de manière éjaculatoire ?

Exercice 35: (Exo Centrale)

Montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminons ses éléments propres.

↳ linéarité: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, P et $Q \in \mathbb{R}[X]$ (avant de le faire, chronométriez-vous et tentez de battre 2 min pour prouver la linéarité)

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= (\lambda P + Q)'(X^3 + X) - (\lambda P + Q) \\ &= \lambda(P'(X^3 + X) - P(3X^2 - 1)) + (Q'(X^3 + X) - Q(3X^2 - 1)) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \text{ donc } f \text{ linéaire} \end{aligned}$$

↳ linéarité de la dérivation poly

↳ $f: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$: claire

Donc f est un endomorphisme

(Pour déterminer les éléments propres $(\mathcal{E}_\lambda) = \begin{cases} f(P) = \lambda P \\ P \in \mathbb{R}[X] \text{ inconnue} \end{cases}$)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$

Analyse: On suppose $f(P) = \lambda P$

Retenez l'analyse en étudiant le degré, le dominant, ou Ker

↳ Si $P = p \in \mathbb{R}^*$, $f(P) = \lambda p$ donc $-p(3X^2 - 1) = \lambda p$
Impossible donc P non constant

↳ Si $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $a_n \neq 0$

$$f(P) = \lambda P \text{ serait } (X^3 + X)P - (3X^2 - 1)P = \lambda P$$

$$\begin{aligned} [Q]_{n+2} &= na_n - 3a_n = 0 \Rightarrow \boxed{n=3} \text{ (deg } P=3 \text{ car } a_n \neq 0) \\ [Q]_{n+1} &= (n-1)a_{n-1} - 3a_{n-1} = 0 \Rightarrow \boxed{a_2=0} \end{aligned}$$

Donc $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ tel que $P = aX^3 + bX + c$ et $P' = 3aX^2 + b$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } (X^3 + X)(3aX^2 + b) - (3X^2 - 1)(aX^3 + bX + c) \\ = X^3(3aX^2 + 3a) + bX - (X^3(-a + 3b) + X^2(3c) - bX - c) \\ = X^3(-2b + 4a) - X^2 3c + c + 2bX \end{aligned}$$

$$f(P) = \lambda P \text{ s'écrit } X^3(4a - 2b) - X^2 3c + 2bX + c = a\lambda X^3 + b\lambda X + c\lambda$$

Par définition du polynôme :

$$\begin{cases} 4a - 2b = \lambda a \\ -3c = 0 \\ 2b = b\lambda \\ c = c\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = \lambda a \\ c = 0 \\ 2b = b\lambda \\ 0 = 0 \end{cases}$$

• $\lambda = 2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 0 \\ 0 = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Si P est sol de $(\mathcal{E}_2)$, alors $P \in \text{Vect}(X^3 + X)$

• $\lambda \neq 2$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Comme $a \neq 0$, $\lambda = 4$. Si P est sol de $(\mathcal{E}_4)$, $P \in \text{Vect}(X^3)$
 $(\mathcal{E}_\lambda)$ a pour seule sol $\{0\}$ si $\lambda \neq 4$ et $\lambda \neq 2$

$$\begin{aligned} \text{Sol}_{\mathcal{E}_2} &\subset \text{Vect}(X^3 + X) \\ \text{Sol}_{\mathcal{E}_4} &\subset \text{Vect}(X^3) \end{aligned}$$

↳ Synthèse : On vérifie que $\left. \begin{aligned} f(X^3+X) &= 2(X^3+X) \\ f(X^3) &= 4X^3 \end{aligned} \right\}$ faites le en moins de 1m !!

↳ Conclusion

- $\text{Spec}(f) = \{2, 4\}$
- $E_2(f) = \text{Vect}(X^3+X)$
- $E_4(f) = \text{Vect}(X^3)$

Exercice 44 :

• Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie n . Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v - v \circ u = u$

1) Démontrons, par récurrence sur $K \in \mathbb{N}$, P_K : " $u^K \circ v - v \circ u^K = Ku^K$ "

Ini : $K=0$: $u^0 \circ v - v \circ u^0 = v - v = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 $0 \cdot u^0 = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 donc OK

Héxé : Soit $K \in \mathbb{N}$, supposons P_K , montrons P_{K+1}

$$\begin{aligned} u^{K+1} \circ v &= u(u^K \circ v) \\ &= u(Ku^K + v \circ u^K) \quad (\text{HR}) \\ &= Ku^{K+1} + u \circ v \circ u^K \quad (\triangle \text{ n'inverse pas } u \circ v \text{ par } v \circ u) \\ &= Ku^{K+1} + (u + v \circ u) \circ u^K \quad (\text{hypo}) \\ &= Ku^{K+1} + u^{K+1} + v \circ u^{K+1} \\ &= (K+1)u^{K+1} + v \circ u^{K+1} \rightarrow \text{démontre } \boxed{P_{K+1}}, \text{ ce qui conclut.} \end{aligned}$$

2) On pose $\Psi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ linéaire. Supposons par l'absurde que u est non nilpotent
 $w \mapsto w \circ v - v \circ w$

C'est à dire, $\forall K \in \mathbb{N}, u^K \neq 0$

Alors, $\forall K \in \mathbb{N}^*, \Psi(u^K) = u^K \circ v - v \circ u^K = Ku^K$

Donc, comme $u^K \neq 0$, u^K est vecteur propre associé à K . Donc $\mathbb{N}^* \subset \text{Spec}(\Psi)$. Or $\text{Spec}(\Psi)$ est finie de cardinal $\leq \dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$

Absurde !