

TD - Réduction 1Ex 20Soit $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \text{ tel que } \text{Mat}_{B_c}(u) = M$$

Quels sont les droites stables par u ?Soit $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ Montrons que :

$$\text{Vect}(x) \text{ stable par } u \iff \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad u(x) = \lambda x} \quad \textcircled{1}$$

Il s'agit de λ et x v.p. de u associé à λ .

$$\textcircled{2} \quad \text{Spec}(u) = \text{Spec}_{\mathbb{R}}(M) = \{ \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda I_3 - M| = 0 \}$$

(Calculatrice en ligne utile : [Wolfram](https://www.wolframalpha.com))Avec $\textcircled{1}$ $\implies$ Supposons que $\text{Vect}(x)$ stable par u Donc : $\forall y \in \text{Vect}(x), u(y) \in \text{Vect}(x)$ En particulier : Comme $x \in \text{Vect}(x)$;
 $u(x) \in \text{Vect}(x)$.Donc : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tel que } u(x) = \lambda x$

R= Supposons qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$

Soit $y \in \text{Vect}(x)$, il existe $\mu \in K$ tel que $y = \mu x$

$$\begin{aligned} u(y) &= u(\mu x) \\ &= \mu u(x) \quad \leftarrow \text{par linéarité de } u \\ &= \lambda \mu x \in \text{Vect}(x) \end{aligned}$$

Avec ②

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A = \det(\lambda I_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ -4 & \lambda-3 & -4 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\lambda-1 & 0 \\ -4 & \lambda+1 & -4 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$= (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ \lambda-5 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$= (\lambda+1)((\lambda-1)(\lambda-5) - 8)$$

(On a' la 2^{ème} colonne.)

$$= (2+1)(\lambda^2 - 6\lambda - 3)$$

$$= (2+1)((\lambda-3)^2 - 9 - 3)$$

$$= (2+1)((\lambda-3)^2 - 12)$$

$$= (2+1)(\lambda-3-2\sqrt{3})(\lambda-3+2\sqrt{3})$$

$$\text{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3}\}$$

Trouvons les ss-espaces propres :

$$\underline{\text{Ker}(A - (-1)I_3) = E_{-1}(A)}$$

$$X \in \text{Ker}(A + I_3) \Leftrightarrow (A + I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc : $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

On aurait pu s'en douter car $C_1 = C_2$.

Par ailleurs, tout les sous-espaces propres sont de dimension 1 car :

$$E_{-1} \oplus E_{3+2\sqrt{3}} \oplus E_{3-2\sqrt{3}} \subset M_{3,1}$$

Ils sont au $\odot$ de dim 1 car sinon A ne serait pas valeur propre.

$$\underline{\text{Ker}(A - (3 + 2\sqrt{3})I_3) = E_{3+2\sqrt{3}}(A) :}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - (3 + 2\sqrt{3})I_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2 - 2\sqrt{3})x + 2y = 0 \\ 4x + (-2\sqrt{3})y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + (-2 - 2\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 - (2\sqrt{3} + 4)y + (8 + 4\sqrt{3})z = 0 \\ x + y + (-1 - \sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + (1 + \sqrt{3})L_2$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$(\text{On obtient } L_2 = L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8+4\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} z = 2z \\ x + y + (-1-\sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = (-1+\sqrt{3})z \end{cases}$$

D'où: $E_{3+2\sqrt{3}}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

De manière symétrique:

$$E_{3-2\sqrt{3}}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Enfin: $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{ -1, 3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3} \right\} = \text{Spec}(A)$
 $\uparrow$
 $\text{Mat}_{B_c}(u)$

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right); E_{3+2\sqrt{3}}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$; E_{3-2\sqrt{3}}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Soit $\lambda \in \text{Spec}(u)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \in E_\lambda(u) \Leftrightarrow \underbrace{\text{Mat}_{B_c}(x, y, z)}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \in E_\lambda(\underbrace{\text{Mat}_{B_c}(u)}_A)$$

$$E_{-1}(u) = \text{Vect}((1, -1, 0),$$

$$E_{3+2i\sqrt{3}} = \text{Vect}((-1 \pm i\sqrt{3}, 2, 1))$$

3 droites stables qui sont les 3 s.e.p de u

$$\text{Mat}_{B_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+2y, 4x+3y+4z, 2x+2y+z) \end{array} \right.$$

Ex 3.1 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\text{rg}(A) = \text{Tr}(A) = 1$

Mo $A^2 = A$

Soit $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A

$$1 = \text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_n))$$

$(C_1, \dots, C_n)$ Plongende

Théorème de la base extraite (TBE):

$\exists j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que (C_{j_0}) base de $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$

$\forall j \in \{1, \dots, n\} \exists! a_j \in K$ tel que $C_j = a_j C_{j_0}$

$$(a_{j_0} = 1)$$

$$A = (a_1 C_{j_0} \mid \dots \mid a_n C_{j_0})$$

$$= C_{j_0} (a_1, \dots, a_n)$$

Posons $C_{j_0} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_n b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 b_n & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{C_{j_0}}_{\neq 0} \underbrace{L}_{\neq 0}, \quad L = (a_1, \dots, a_n)$$

$$L C_{j_0} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \text{Tr}(A)$$

$$A^2 = C_{j_0} \underbrace{L C_{j_0}}_{\text{Tr}(A)=1} L = C_{j_0} L = A$$

2ème solution :

$$\text{Soit } \varphi_A : \mathcal{M}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{M}_{n+1} \quad \text{Mat}_{B_c}(\varphi_A) = A$$
$$X \longmapsto AX$$

$$\text{Tr}(\varphi_A) = 1; \quad \text{rg}(\varphi_A) = 1$$

Par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = n-1$$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n+1}$ adaptée à $\text{Ker}(\varphi_A)$

$\hat{=}$ $(X_1, \dots, X_{n-1})$ base de $\text{Ker}(\varphi_A)$

$$\text{Mat}_X(\varphi_A) = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{O}_{n-1} & \begin{matrix} \vdots \\ C \end{matrix} \\ \hline \mathcal{O} & \alpha = 1 \end{array} \right) \begin{matrix} / X_1 \\ \vdots \\ / X_{n-1} \\ / X_n \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\varphi_A(X_1) \quad \quad \quad \varphi_A(X_{n-1}) \quad \quad \quad \varphi_A(X_n)$

$$\alpha = 1 \text{ car } \text{Tr}(A) = 1$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{n-1} & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{n-1} & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{n-1} & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Mat}_K(\varphi_A)^2 = \text{Mat}_K(\varphi_A)$$

$$\stackrel{||}{\text{Mat}_K(\varphi_A^2)}$$

$$\text{Donc: } \varphi_A^2 = \varphi_A \quad \text{et} \quad A^2 = A$$

Ex 37 (1) Mg: Si n impaire et $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$

$$\text{Plus: } \text{Spec}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset.$$

On a: $\text{Spec}_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset \iff \chi_A$ possède une racine dans $\mathbb{K}$

On sait que: $\deg(\chi_A) = n$ et χ_A est unitaire.

$$\text{On a: } \chi_A(z) \underset{z \rightarrow \pm \infty}{\sim} z^n \int \begin{array}{l} \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty \\ \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} -\infty \end{array}$$

↑ car n impaire

χ_A est $\mathcal{C}^0$, donc par le TVI; χ_A s'annule.

Q2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de vp réelles

Ex 43 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixe tel que $\text{Tr}(A) \neq 0$
 $n \geq 2$

$$\varphi: M_n \longrightarrow M_n \\ M \longmapsto \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$$

Soit $M \in \text{Ker}(\varphi) = \mathcal{H}$ de $\dim n^2 - 1 \neq 0$

$$\varphi(M) = \boxed{\text{Tr}(A)} M \\ = \lambda M$$

$\text{Tr}(A)$ v.p. de φ