

Exercice 33:

• Soit $a \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix} = M(a) \in M_3(\mathbb{R})$. $M(a)$ est-elle diagonalisable / trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & a & \lambda-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}$

$\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \end{matrix}$

$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda+(1-a) & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-1)(-1)^5(-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda+(1-a) \end{vmatrix}$

$\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \end{matrix}$

$= (\lambda-1)(\lambda^2 + \lambda(1-a) + 1)$

↳ On pose $P = X^2 + (1-a)X + 1$ et $\Delta = (1-a)^2 - 4 = (a+1)(a-3)$

a	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Δ	+	$\emptyset$	$\emptyset$	+

↳ les tableaux de signes sont très appréciés à l'oral
faire la discussion sur a et non Δ

• Cas $a \in]-1; 3[$: $\Delta < 0$ donc χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas trigonalisable, a fortiori, diagonalisable

• Cas $a = -1$ ou $a = 3$: $\Delta = 0$ donc $P = (X + \frac{1-a}{2})^2$, A trigonalisable car P est scindé sur $\mathbb{R}$

↳ Cas $a = 3$: $\text{Spec}(A) = \{1\}$. Or $A \neq \text{Id}$ donc A non diagonalisable

↳ Cas $a = -1$: $\text{Spec}(A) = \{1, -1\}$. Or, $\chi_A = (X-1)(X+1)^2$
Or, $1 \leq \dim(E_1(A)) \leq \text{mult}(\chi_A, 1) = 1$
Donc $\dim(E_1(A)) = 1$

Aussi, $\dim(E_{-1}(A)) = 3 - \text{rg}(A + I_3)$ (théorème du rang)

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(A + I_3) = 2$
donc $\dim(E_{-1}(A)) = 1 \neq \text{mult}(\chi_A, -1)$

• Cas $a > 3$ ou $a < -1$:

donc A non diagonalisable sur $\mathbb{R}$

• Alors, les racines de P sont $\left\{ \frac{(a-1) + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{(a-1) - \sqrt{\Delta}}{2} \right\}$

Or $P(1) = 2 + 1 - a = 3 - a \neq 0$ donc ses racines sont distinctes de 1 donc $|\text{Spec}_{\mathbb{R}}(A)| = 3$ et A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Synthèse: A est diagonalisable ssi $a \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$
 A est trigonalisable ssi $a \in]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$

Exercice 21:

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi_A: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $M \mapsto AM$

1) Soit λ une valeur propre de A . Soit $C \in E_\lambda(A)$

On pose $M = \begin{pmatrix} C & C & \dots & C \end{pmatrix}_n$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \Phi_A(M) &= AM \\ &= A(C \mid \dots \mid C) \\ &= (AC \mid \dots \mid AC) \\ &= (\lambda C \mid \dots \mid \lambda C) \\ &= \lambda M, \text{ donc } \lambda \text{ est valeur propre de } \Phi_A. \end{aligned}$$

la technique de décomposer par colonnes pour mieux multiplier sert énormément à savoir faire !

$$\text{Donc } \boxed{\text{Spec}(A) \subset \text{Spec}(\Phi_A)}$$

• Soit $M \in E_\lambda(\Phi)$, $M \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, on pose $M = (C_1 \mid \dots \mid C_n)$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \Phi_A(M) &= AM = (AC_1 \mid \dots \mid AC_n) \\ &= \lambda M \\ &= (\lambda C_1 \mid \dots \mid \lambda C_n) \end{aligned}$$

les mêmes

M est non nul donc $\exists K \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_K \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

$$\text{Or, } AC_K = \lambda C_K \text{ donc } \boxed{\lambda \in \text{Spec}(A)}$$

2) Soit $\lambda \in \text{Spec}(A) = \text{Spec}(\Phi_A)$

Pour tout $M = (C_1 \mid \dots \mid C_n) \in E_\lambda(\Phi)$

$$\hookrightarrow \Phi(M) = AM = \lambda M = (\lambda C_1 \mid \dots \mid \lambda C_n) \text{ donc, pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \boxed{C_i \in E_\lambda(A)}$$

• Soit $(C_1, \dots, C_n) \in E_\lambda(A)^n$

$$\begin{aligned} \text{Alors } A(C_1 \mid \dots \mid C_n) &= (AC_1 \mid \dots \mid AC_n) \\ &= (\lambda C_1 \mid \dots \mid \lambda C_n) \\ &= \lambda(C_1 \mid \dots \mid C_n) \\ \text{donc } \boxed{(C_1 \mid \dots \mid C_n) \in E_\lambda(\Phi)} \\ \text{donc } \boxed{E_\lambda(\Phi) = E_\lambda(A)^n} \end{aligned}$$

Exercice 26:

• Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\text{rang}(M) = 1$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, $u: \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, montrons que u diagonalisable
 $(\Leftrightarrow) \text{Tr}(M) \neq 0$ $x \mapsto Mx$

$(\Rightarrow)$ 0 est v_p de u car u non-injective (on suppose u diagonalisable)

D'après le théorème du rang, $\dim(E_0(u)) = n - \text{rg}(u)$

Donc $X^{n-1} \mid \chi_u$ car $\dim(E_0(u)) \leq \text{mult}(0, \chi_u)$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\chi_u = X^{n-1}(X - \text{Tr}(u))}$$

Supposons par l'absurde que $\text{Tr}(u) = 0$

Alors M est semblable à $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$

Donc $M = 0$, absurde car $\text{rang}(M) = 1$

$$\text{Donc } \boxed{\text{Tr}(u) \neq 0}$$

$(\Leftarrow)$ Supposons $\text{Tr}(u) \neq 0$

χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$. Il y a deux v_p , 0 et $\lambda \in \mathbb{K}^*$

0 est de multiplicité $n-1 = \dim(E_0(u))$ dans χ_u .

On lit $m_\lambda(\chi_u) = 1$. Or, $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda(\chi_u)$

$$\text{Alors, } \sum_{\lambda \in \text{Spec}(u)} (\dim(E_\lambda)) = n \text{ donc } \boxed{u \text{ diagonalisable}}$$

$\Rightarrow$ Supposons A nilpotente
 Alors $\text{Spec}_A = \{0\}$

$$\forall K \in \mathbb{N}, \text{Tr}(A^K) = \sum_{i=1}^n 0^K = 0$$

$\Leftarrow$ Supposons, $\forall K \in \mathbb{N}, \text{Tr}(A^K) = 0$

De manière analogue: $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des ν_p 2 à 2 distinctes

$$\forall K \in \mathbb{N}, \text{Tr}(A^K) = \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i^K = 0 \text{ où } \forall i \in \mathbb{N}, m_i = \text{mult}(\lambda_i, \chi_A)$$

$$\text{Alors } \begin{cases} m_1 \lambda_1 + \dots + m_p \lambda_p = 0 \\ m_1 \lambda_1^2 + \dots + m_p \lambda_p^2 = 0 \\ \vdots \\ m_1 \lambda_1^p + \dots + m_p \lambda_p^p = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{V})$$

$$\text{Matriciellement, } (\mathcal{V}) \text{ est eq à: } \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \lambda_1 \\ \vdots \\ m_p \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice de Vandermonde

$\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_p)) = \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ donc $V(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ est inversible
 et en multipliant par sa ${}^{1 \leq i < j \leq p}$ inverse: $\begin{pmatrix} m_1 \lambda_1 \\ \vdots \\ m_p \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Or, $\forall i \in \mathbb{N}, m_i \neq 0$ donc $\lambda_i = 0$.

Or, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont 2 à 2 distincts donc $p = 1$. 0 est la seule ν_p