

Ex 26. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\text{rg}(M) = 1$

Montrons que $M \text{ diag sur } \mathbb{K} \iff \text{tr}(M) \neq 0$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Notons } f & \text{ de } \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto MX \end{array}$$

f l'endomorphisme canoniquement associé à M
 B_c la base canonique de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$

Donc: $\text{Mat}_{B_c}(f) = M$

Alors: d'après le théorème du rang:

$$\dim(\text{Ker}(f)) = n - 1$$

Notons S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ tel que

$$S \oplus \text{Ker}(f) = \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$

Notons $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ adaptée

à $S \oplus \text{Ker}(f)$ avec $\begin{cases} (e_1, \dots, e_{n-1}) & \text{base de } \text{Ker}(f) \\ (e_n) & \text{base de } S \end{cases}$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a:

$$N = \text{Mat}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \bigcirc & * \\ \hline \bigcirc & \lambda \end{array} \right) \begin{array}{l} | e_1 \\ \vdots \\ | e_{n-1} \\ | e_n \end{array}$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $f(e_1) \quad \quad \quad f(e_n)$

$$N = PNP^{-1} \text{ où } P = P_{B \rightarrow B}$$

$$\lambda = \text{Tr}(M) = \text{Tr}(N) \text{ et } \chi_M = \chi_N = X^{n-1}(X - \text{Tr}(M))$$

$\Rightarrow$ Raisonnons par contraposée.

Supposons $\text{Tr}(M) = 0$, alors $\lambda = 0$ et

N n'est pas diagonalisable car N admet 0 comme seule valeur propre et $N \neq 0_{n \times n(K)}$

$\Leftarrow$ On suppose $\lambda = \text{Tr}(M) \neq 0$

On remarque que :

• χ_M est scindé sur K

• $m_0 = n-1 = \dim(E_0(f)) = \dim(\text{Ker}(f - 0 \cdot \text{Id}_n))$

• On a: $m_\lambda = 1$ et $1 \leq \dim(\mathcal{E}_\lambda(\mathcal{L})) \leq 1$

Par critère: M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Ex 30

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

① Montrer que A diag sur $\mathbb{R}$

② Trouver $P \in GL_2(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Remarque: Une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \det(\lambda I_n - M) \\ &= \det((\lambda I_n - M)^T) \\ &= \det(\lambda I_n - M^T) \\ &= \chi_{M^T}(\lambda) \end{aligned}$$

(le déterminant est le même pour une matrice et sa transposée)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ -10 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) \\ &= (\lambda+1)(\lambda-4) \end{aligned}$$

Donc: $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda=1, 4\}$ (*)

$$1 \leq \dim(E_{-1}(A)) \leq m_{-1} = 1$$

donc: $\dim(E_{-1}(A)) = 1$

$$1 \leq \dim(E_4(A)) \leq m_4 = 1$$

donc: $\dim(E_4(A)) + \dim(E_{-1}(A)) = \dim(\mathcal{H}_{2,1}(\mathbb{R}))$

Donc: A diagonalisable sur $\mathbb{R}$
(on aurait pu conclure avec (*) directement)

Soit φ_A l'endomorphisme asso de $\mathcal{H}_{2,1}(\mathbb{R})$ associé à A

$$\begin{array}{ccc} \text{El que} & \varphi_A | \mathcal{H}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{H}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto AX \end{array}$$

Soit B_e la base canonique de $\mathcal{H}_{2,1}(\mathbb{R})$
" (e_1, e_2)

$$\text{Mat}_{B_c}(\varphi_A) = A$$

$$E_1(A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) : AX = -X \right\}$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \varphi_A(X) = -X &\iff 10x + 5y = 0 \\ &\iff y = -2x \end{aligned}$$

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{de m}^1 : E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Posons $B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ qui est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, en effet: $E_1(A) \oplus E_2(A) = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

Par théorème de changement de base :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{B_c}(\varphi_A) &= P_{B_c \rightarrow B} \text{Mat}_B(\varphi_A) P^{-1} \\ &\quad \begin{array}{ccc} \text{---} \text{L} \text{---} & \text{---} \text{L} \text{---} & \\ & \text{---} \text{L} \text{---} & \\ & & = A \end{array} \\ &= P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ie: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{---} \text{L} \text{---} = P^{-1}$

③ Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$

$$M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M^3 - 2M = P D P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P^{-1} M^3 P}_{= N^3} - 2 \underbrace{P^{-1} M P}_{= N} = D$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N^3 - 2N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (*) \\ \text{et } N = P^{-1} M P \end{cases}$$

Analyse: Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ solution de (*)

Toute matrice qui commute avec une matrice ayant des coeff. diagonaux λ_1, λ_2 distincts est elle-même diagonale.

$$\begin{aligned} ND &= N(N^3 - 2N) \\ &= (N^3 - 2N)N \\ &= DN \end{aligned}$$

Montrons que N est diagonale.

$$ND = \begin{pmatrix} 4a & -b \\ 4c & -d \end{pmatrix} ; DN = \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

Donc:
$$\begin{cases} 4a = 4a \\ 4b = -b \\ 4c = -c \\ -d = -d \end{cases}$$

Donc: $b = c = 0$

Donc: N est diagonale.

Comme N est solution de (*);

$$\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc:
$$\begin{cases} a^3 - 2a - 4 = 0 \\ d^3 - 2d + 1 = 0 \end{cases}$$

pas de racines $\in \mathbb{R}$

donc:
$$\begin{cases} (a-2)(a^2+2a+2) = 0 & (1) \\ (d-1)(d^2+d-1) = 0 & (2) \end{cases}$$

$\Delta_{(1)} = 5$

$d_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$d_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Les candidats pour être solutions sont:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$

Synthèse: Les 3 matrices candidates sont
bien solution de (*)

Donc les 3 solutions de notre équation sont:

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ex 23 $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$$N_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}$$

but 1^{ère} des autres
colonnes

$$+ (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2} (-1)^{n-1} + \lambda^n = \lambda^n - 1$$

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathcal{U}_n} (X - \omega)$$

$$\begin{aligned} \text{on } \mathcal{U}_n: \quad \mathcal{U}_n &= \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} \\ &= \left\{ e^{i \frac{2k\pi}{n}} : k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n \right\} \\ &= \left\{ \omega^k : k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n \right\} \end{aligned}$$

$$\text{on } \omega = e^{i \frac{2\pi}{n}}$$

X^n est scindé à racine simple

$$\text{Donc: } |\text{Spec}_{\mathbb{C}}(M)| = n \quad \text{et} \quad M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Ainsi: M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$\text{Q2) On a: } A = a_0 I_n + a_1 M + \dots + a_{n-1} M^{n-1}$$

$$\text{on } a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$$

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } M = P D P^{-1}$$

$$\text{Spec}(D) = \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}$$

$$\text{On peut supposer } D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \omega & \\ 0 & \ddots & \\ & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A = P \left(a_0 \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} \omega & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega^{n-1} \end{pmatrix} + \dots + a_{n-1} \begin{pmatrix} \omega^{n-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix} \right) P^{-1}$$

$$\det(A) = (a_0 \times 1 + \dots + a_{n-1} \times 1) \\ \times (a_0 \times 1 + \dots + a_{n-1} \omega^{n-1}) \\ \times \dots \times (a_0 \times 1 + \dots + a_{n-1} (\omega^{n-1})^{n-1})$$

$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\det(A) = Q(1) \times \dots \times Q(\omega^{n-1}) \\ = \prod_{i=0}^{n-1} Q(\omega^i) \\ = \prod_{\substack{\zeta \in \mathbb{Q}_n \\ \zeta \neq 1}} Q(\zeta)$$

Ex 40 $AF M_n(\mathbb{C})$

Q1) Montrons que $\exists \varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad 0 < |\lambda| < \varepsilon \Rightarrow \det(A - \lambda I_n) \neq 0$$

Raisonnons par contraposée.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

Supposons $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $0 < |\lambda| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon = \min \{ |\lambda| : \lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{C}}(A) \} > 0$

1^{er} cas : 0 n'est pas valeur propre. $\neq 0$ d'Alcembert-Goursat et Jiri

$\varepsilon > 0$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\lambda| < \varepsilon$

λ ne peut être vp et $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$.

2^{ème} cas : Si 0 n'est pas la seule vp, on

pose $\varepsilon = \min \{ |\lambda| : \lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{C}}(A) \} \setminus \{0\}$

3^{ème} cas : Si 0 est l'unique vp

on peut poser $\varepsilon = 1$.