

TD – Réduction des endomorphismes et des matrices 1

Notation. — La lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps (commutatif) infini.

Exercice 1 ★☆☆ — Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$, où $a, b, c \in \mathbf{R}$.

1. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$?
2. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$?

banqueCcinp67

Exercice 2 ★☆☆ — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A .
2. Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable?

banqueCcinp69

Exercice 3 ★☆☆ — Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On suppose que $f(e_1) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

1. Donner le rang de f .
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

banqueCcinp72

Exercice 4 ★☆☆ —

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

banqueCcinp73

Exercice 5 ★☆☆ — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
(b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t , dérivables sur $\mathbf{R}$. En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

banqueCcinp74

Exercice 6 ★☆☆ — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

2. On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à A . Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. On donnera explicitement les valeurs de a , b et c .
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

banqueCcinp75

Exercice 7 ★☆☆ — Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E .

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbf{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par :

$$u: P \mapsto \int_1^X P \quad \text{et} \quad v: P \mapsto P'$$

Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$. On pourra penser à utiliser le déterminant.

banqueCcinp83

Exercice 8 ★☆☆ — Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbf{R}$? Si oui, les diagonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

diagonalisabiliteDiagonalisationMatrices2x2 [corrigé]

Exercice 9 ★★☆☆ — À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? La diagonaliser lorsque c'est le cas.

diagonalisabiliteDiagonalisationMatrices2x2TriangulaireGenerique

Exercice 10 ★☆☆ — Démontrer que les matrices suivantes sont diagonalisables dans $M_3(\mathbf{C})$ et les diagonaliser.

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

diagonalisabiliteDiagonalisationMatrices3x3

Exercice 11 ★★☆☆ — Soit $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$, mais pas dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

2. Démontrer que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

diagonalisabiliteMatrice3x3SurCPasSurR [corrigé]

Exercice 12 ★☆☆ — Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

1. Démontrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.
2. Démontrer que λ est une valeur propre de u .

polynomeAnnulateurEndomorphismeRang1

Exercice 13 ★☆☆ — Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Déterminer les éléments propres de :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$$

elementsPropresCrochetLieMatrices2x2

Exercice 14 ★☆☆ — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Posons :

$$\|A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| : i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

Démontrer que $\text{Spec}_{\mathbf{R}}(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$.

localisationValeurPropres

Exercice 15 ★☆☆ — Soit E un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Démontrer que tout endomorphisme de E a au-moins une valeur propre.
2. Est-ce vrai si E n'est pas de dimension finie ? On pourra considérer l'endomorphisme φ de $\mathbf{C}[X]$ défini par, pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, $\varphi(P) = (X-1)P(X)$.

existenceValeurPropreEndomorphismeEspaceVectorielSurC

Exercice 16 ★☆☆ — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $\lambda = 2$ est valeur propre de A et que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

2. Vérifier que A possède deux autres valeurs propres -2 et 4 avec comme vecteurs propres respectivement associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par leurs premiers termes a_0, b_0, c_0 et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = -2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -3a_n + b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = -a_n + b_n + 3c_n \end{cases}$$

valables pour tout $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $a_0 = 2$, $b_0 = 2$ et $c_0 = 0$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les nombres réels a_n, b_n et c_n en fonction de n .

ccinTroisSuitesRecurrentesImbriquees

Exercice 17 ★☆☆ —

1. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Rappeler la définition d'une valeur propre et démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\lambda \in \text{Spec}(u) \iff \det(u - \lambda \text{id}_E) = 0.$$

En déduire que u possède au plus n valeurs propres distinctes.

2. Trouver un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ ayant 0 et 1 comme valeurs propres.

ccinMajorationNombreValeursPropres

Exercice 18 ★☆☆ — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où a est un réel.

1. Quel est le rang de A ? La matrice A est-elle inversible?
2. La matrice A est-elle diagonalisable?

ccinpRangInversibiliteDiagonalisabiliteMatrice3x3Parametre

Exercice 19 ★☆☆ — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A , puis une base de vecteurs propres associés.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique vers la base de vecteurs, puis son inverse P^{-1} .
3. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2y + z \\ z' = 3z \end{cases}$. Résoudre ce système en utilisant la question 1.

ccinpSystemeDifferentielLineaire3x3TriangulaireDiagonalisable

Exercice 20 ★☆☆ — Notons u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les droites de $\mathbf{R}^3$ stables par u .

ccinpDroitesStablesMatrice3x3DiagonalisableSurR

Exercice 21 ★☆☆ — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Posons :

$$\Phi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

1. Déterminer les valeurs propres de Φ_A en fonction des valeurs propres de A .
2. Déterminer les sous-espaces propres de Φ_A en fonction des sous-espaces propres de A .

ccinpElementsPropresMultiplicationParMatriceGauche

Exercice 22 ★☆☆ — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Notons U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Quel est le rang de U ? Démontrer que 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$.
2. Démontrer que n est valeur propre de U , et trouver le sous-espace propre correspondant. Quel est le polynôme caractéristique de U ?
3. Diagonaliser U (on pourra commencer par trouver une base du noyau de U).
4. Retrouver le polynôme caractéristique de U par un calcul direct de déterminant.

ccinpDiagonalisationMatriceTousCoefficientsUn

Exercice 23 ★☆☆ — On rappelle que $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$, notons u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ canoniquement associé à A .

1. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^3$ stables par u .
2. Déterminer le commutant de A (l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ qui commutent avec A).

ccinpSousEspacesStablesCommutantMatriceVandermondeComplexe3x3

Exercice 24 ★☆☆ —

1. Démontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
2. Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont-elles semblables ?

ccinpMatricesSemblablesVersusMemePolynomeCaracteristique

Exercice 25 ★☆☆ — Soit $n \geq 2$, posons :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & n^2 \cdot X P - (X^2 + X) P' - X^3 P'' . \end{array} \right.$$

1. Démontrer que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. L'endomorphisme g est-il injectif ? diagonalisable ?

ccinpInjectiviteDiagonalisabiliteEndomorphismeRnX

Exercice 26 ★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang 1. Démontrer que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si sa trace est non nulle.

ccinpCnsDiagonalisabiliteMatriceRang1

Exercice 27 ★☆☆ — Pour tout $z \in \mathbf{C}$, posons $A(z) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A(z)$ est diagonalisable, sauf pour une valeur particulière de z que l'on précisera.
2. Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. Démontrer qu'il existe un unique complexe z , noté $z(\theta)$, tel que $e^{i\theta}$ soit valeur propre de $A(z)$.

ccinpDiagonalisabiliteMatrice3x3ComplexeParametreValeurPropreModuleUn

Exercice 28 ★☆☆ — Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{R}$.

ccinpDiagonalisabiliteSurRMatrice3x3AntidiagonaleParametres

Exercice 29 ★☆☆ — Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $m_{i,i-1} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $m_{1,n} = 1$, les autres coefficients étant nuls.

1. Démontrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines n -ièmes de l'unité.
2. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $A = a_0 I_n + a_1 M + \dots + a_{n-1} M^{n-1}$. Démontrer que :

$$\det(A) = \prod_{\omega \in \mathbf{U}_n} (a_0 + a_1 \omega + \dots + a_{n-1} \omega^{n-1}).$$

ccinpDiagonalisabiliteValeursPropresDeterminantMatricesCirculantes

Exercice 30 ★☆☆ — Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

ccinpEquationMatricielleCubique

Exercice 31 ★☆☆ — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\text{rg}(A) = \text{tr}(A) = 1$. Démontrer que $A^2 = A$.

ccinpMatricesRangUnTraceUn

Exercice 32 ★☆☆ — Déterminer toutes les matrices commutant avec $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

ccinpCommutantMatrice3x3CirculanteParametres

Exercice 33 ★☆☆ — Discuter de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité en fonction du réel a de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$.

tpeDiagonalisabiliteTrigonalisabiliteMatrice3x3Parametre

Exercice 34 ★★☆☆ — Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer les valeurs propres de la matrice de format (n, n) , dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux des dernières lignes et colonnes qui valent 1.

tpeSpectreMatriceDeuxDernieresLignesColonnesUn

Exercice 35 ★★☆☆ — Posons :

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P. \end{array} \right.$$

Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ et déterminer ses éléments propres.

tpeElementsPropresEndomorphismeRX

Exercice 36 ★★☆☆ — Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Notons A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Démontrer qu'une droite engendrée par un vecteur u non nul est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f .
- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Démontrer que le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par f si et seulement si le vecteur $(a, b, c)^T$ est un vecteur propre de A^T .
- Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.
 - f admet une unique droite stable.
 - f admet un unique plan stable.
 - Le polynôme caractéristique de f admet une unique racine réelle de multiplicité 1 ou 3 et l'espace propre correspondant est une droite.

- Déterminer les sous-espaces stables de f quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ensamSousEspacesStablesEndomorphismesR3MatricesPermutation

Exercice 37 ★★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$.

- Démontrer que si n est impair alors toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède une valeur propre réelle.
- On suppose n est pair. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne possédant aucune valeur propre réelle.

existenceValeurPropreReelle

Exercice 38 ★★☆☆ — Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u \circ v = v \circ u$ et v soit nilpotent. Cet exercice a pour but de montrer que $\det(u + v) = \det(u)$.

- Établir le résultat voulu lorsque $n = 1$.
- Donner l'allure de la matrice de u , v et $u + v$ dans une base adaptée à $\text{Im}(v)$.
- Conclure par récurrence sur la dimension de l'espace.

determinantEndomorphismePlusNilpotentCommutent

Exercice 39 ★★☆☆ — Soit E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Cet exercice a pour but de montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E stable par u de dimension 1 ou 2.

1. Que dire si u possède une valeur propre ? On supposera désormais que ce n'est pas le cas.
2. Notons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E . Démontrer qu'il existe un complexe λ et un vecteur colonne à coefficients complexes Z tels que $MZ = \lambda Z$.
3. Écrivons $\lambda = \alpha + i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ et $Z = X + iY$, où X et Y sont des vecteurs colonnes à coefficients réels. Calculer MX et MY en fonction de α, β, X et Y .
4. Conclure.

existenceDroitePlanStableEndomorphismeEspaceVectorielReel

Exercice 40 ★★☆☆ — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C} \quad 0 < |\lambda| < \varepsilon \implies \det(A - \lambda I_n) \neq 0.$$

2. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, posons :

$$\|M\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$$

Démontrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, il existe une suite $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de matrices inversibles telle que :

$$\|M - M_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

densiteEnsembleMatricesInversibles

Exercice 41 ★★☆☆ — Dans cet exercice, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Soit T une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbf{K}$, soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe des réels $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in]0, \varepsilon[$ tels que la matrice :

$$T + \text{Diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

soit diagonalisable.

2. Étant donnée une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, posons :

$$\|M\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|.$$

Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ trigonalisable, il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonalisable telle que $\|M - N\| \leq \varepsilon$.

3. Démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice diagonalisable $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\|M - N\| \leq \varepsilon$.
4. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, unitaire et de degré n . Démontrer que le polynôme P est scindé sur $\mathbf{R}$ si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad |P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^n.$$

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Supposons donnée une suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisables sur $\mathbf{R}$ telle que :

$$\|M - A_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Démontrer que M est trigonalisable sur $\mathbf{R}$.

adherenceEnsembleMatricesDiagonalisablesReelComplexe

Exercice 42 ★★☆☆ — Soit E un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que u est irréductible ($\{0_E\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables par u).

1. Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $\mathcal{B}_x := (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
2. Démontrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_x$ de E ne dépend pas de x .

endomorphismesIrreductibles

Exercice 43 ★★☆☆ — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & \text{tr}(A) M - \text{tr}(M) A. \end{array} \right.$$

ccinpElementsPropresEndomorphismeAvecTraceMnR

Exercice 44 ★★☆☆ — Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$.

1. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$.
2. En déduire que u est nilpotent.

ccinpCrochetLieEgalUnDesDeuxNilpotent [indication(s)]

Exercice 45 ★★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des nombres complexes.

2. Soit $P = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ un polynôme de degré n , unitaire, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$. Supposons que $P \in \mathbf{Z}[X]$. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, le polynôme $\prod_{k=1}^n (X - \lambda_k^p)$ est à coefficients entiers.

centraleSupelecMatriceCompagnonPolynomeCoefficientsEntiers

Exercice 46 ★★☆☆ —

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Calculer $A^2 - \text{tr}(A) A + \det(A) I_2$.
2. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ semblables à leur carrés.

minesPontsMatrice2x2CoefficientsReelsSemblableCarre

Exercice 47 ★★☆☆ — Soient un entier $n \geq 2$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \dots = \text{tr}(A^n) = 0.$$

minesPontsCaracterisationNilpotenceTracesPuissancesNulles

Exercice 48 ★★☆☆ — Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Calculer $\chi_A(-k)$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

minesPontsMatriceCoefficientsColonnesNumeroColonneSaufDiagonaleNulle

Exercice 49 ★★★ — Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $R_i := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$.

1. On suppose que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,i}| > R_i$. Démontrer que A est inversible.
2. Démontrer que :

$$\text{Spec}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq R_i\} \quad [\text{théorème de Gerschgorin}] .$$

3. On suppose à nouveau que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,i}| > R_i$. Démontrer que :

$$|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^n (|a_{i,i}| - R_i)$$

4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} > R_i$. Démontrer que :

$$\det(A) \geq \prod_{i=1}^n (a_{i,i} - R_i)$$



Semyon Aranovich Gershgorin (1901-1933)

xDisquesGershgorin

Exercice 50 ★★★ — Notons S l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 .$$

Les matrices de S sont appelées matrices stochastiques. Soit $M \in S$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de A , soit $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

1. Démontrer que $|\lambda| \leq 1$.
2. Démontrer que 1 est valeur propre de M .
3. Supposons λ de module 1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que :

$$|x_i| = \max \{|x_j| : j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

Démontrer qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_j = \lambda x_i$. En déduire que λ est une racine m -ième de l'unité, avec $m \leq n$.

ensValeursPropresMatricesStochastiques

Exercice 51 ★★★ — Soient un entier $n \geq 1$ et un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E qui est stable par u .
2. Soient u un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Démontrer que l'endomorphisme induit :

$$u_F \quad \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est diagonalisable.

3. Soient un entier $p \geq 2$ et $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes diagonalisables de E . Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.
 - (a) Les endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ commutent deux à deux.
 - (b) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$ est diagonale.
4. Soient un entier $p \geq 2$ et $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices diagonalisables sur $\mathbf{K}$. Démontrer que les deux assertions sont équivalentes.
 - (a) Les matrices $A_1, \dots, A_p$ commutent deux à deux.
 - (b) Il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $P^{-1} A_i P$ est diagonale.

cnsDiagonalisabiliteDiagonalisabiliteEndomorphismeInduitCodiagonalisation

ccinpCrochetLieEgalUnDesDeuxNilpotent [\[énoncé\]](#)**Indication(s) pour l'exercice 44**

1. Reasonner par récurrence sur l'entier naturel k . Pour l'hérédité, on pourra remarquer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
 u^{k+1} \circ v - v \circ u^{k+1} &= u^{k+1} \circ v - v \circ u \circ u^k \\
 &= u^{k+1} \circ v - (u \circ v - u) \circ u^k \quad [\text{par hypothèse } u \circ v - v \circ u = u] \\
 &= u \circ u^k \circ v - u \circ v \circ u^k + u^{k+1}
 \end{aligned}$$

2. Considérer l'endomorphisme (v est linéaire) :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ w & \longmapsto & w \circ v - v \circ w \end{array} \right.$$

du $\mathbf{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$, de dimension finie n^2 . Si, pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'endomorphisme u^k était non nul, que pourrions-nous affirmer quant au spectre de φ ?

Un corrigé de l'exercice 8

(a) *Matrice A.*

- *Étude de la diagonalisabilité de A sur $\mathbf{R}$.* La matrice A est triangulaire supérieure. Son spectre est donc l'ensemble de ses coefficients diagonaux, i.e. :

$$\text{Spec}_{\mathbf{R}}(A) = \{1\}.$$

D'après le théorème du rang pour les matrices :

$$\dim(E_1(A)) := \dim(\text{Ker}(A - I_2)) = 2 - \text{rg}(A - I_2) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Ainsi :

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec}_{\mathbf{R}}(A)} \dim(E_{\lambda}(A)) = 1 \neq 2 \quad [\text{nombre de colonnes de } A].$$

La matrice A n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

(b) *Matrice B.*

- *Étude de la diagonalisabilité de B sur $\mathbf{R}$.* Nous calculons :

$$\chi_B = X^2 - \text{tr}(B)X + \det(B) = X^2 - 2X = X(X - 2).$$

Comme χ_B est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$, la matrice B est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1).

- *Diagonalisation de B sur $\mathbf{R}$.* Soit :

$$f \mid \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & BX \end{array}$$

l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associé à B . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = B$$

où $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. En résolvant les deux systèmes linéaires

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, nous établissons que :

$$E_0(f) = E_0(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(f) = E_2(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme la matrice B est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, l'endomorphisme f est diagonalisable et donc :

$$\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) = E_0(f) \oplus E_2(f).$$

Nous en déduisons que :

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ (formée de vecteurs propres pour f). Par théorème de changement de base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = P_{\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c}$$

qui s'écrit encore :

$$A = P \text{diag}(0, 2) P^{-1}$$

$$\text{où } P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbf{R}).$$

(c) *Matrice C.*

- *Étude de la diagonalisabilité de C sur $\mathbf{R}$.* Nous calculons :

$$\chi_C = X^2 - \text{tr}(C)X + \det(C) = X^2 - 5X - 2 = (X - r_1)(X - r_2)$$

où $r_1 := \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$ et $r_2 := \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$. Comme χ_C est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$, la matrice C est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1).

- *Diagonalisation de C sur $\mathbf{R}$.* Soit :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & CX \end{array} \right.$$

l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associé à C . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = C$$

où $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned} C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} (1-r_1)x + 3y = 0 \\ 2x + (4-r_1)y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 = 0 & (L_1 \leftarrow L_1 - ((1-r_1)/2)L_2) \\ 2x + (4-r_1)y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En effet, comme r_1 est racine de χ_C , $-5r_1 + r_1^2 = -2$, d'où :

$$3 - \frac{(1-r_1)(4-r_1)}{2} = 3 - \frac{4-5r_1+r_1^2}{2} = 0.$$

Par suite :

$$E_{r_1}(f) = E_{r_1}(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4-r_1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2(4-r_1) \\ -4 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3-\sqrt{33} \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

De manière analogue¹, nous obtenons :

$$E_{r_2}(f) = E_{r_2}(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3+\sqrt{33} \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

Comme la matrice C est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, l'endomorphisme f est diagonalisable et donc :

$$\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) = E_{r_1}(f) \oplus E_{r_2}(f).$$

Nous en déduisons que :

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 3-\sqrt{33} \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+\sqrt{33} \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ (formée de vecteurs propres pour f). Par théorème de changement de base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = P_{\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c}$$

qui s'écrit encore :

$$A = P \text{diag}(r_1, r_2) P^{-1}$$

où $P := \begin{pmatrix} 3-\sqrt{33} & 3+\sqrt{33} \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbf{R})$.

1. Nous pourrions également appliquer la conjugaison de la $\mathbf{Q}$ -algèbre $\mathbf{Q}[\sqrt{33}]$, qui est un corps, pour plus d'élégance.

Un corrigé de l'exercice 11

1. • *Observation.* Nous observons que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Ainsi :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons que 1 est valeur propre de A et que $(1 \ 1 \ 1)^T$ est un vecteur propre associé. De plus, dans le calcul du polynôme caractéristique, l'opération élémentaire :

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

fait apparaître un facteur de degré 1.

- *Polynôme caractéristique.* Soit $t \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-3 & -1 & 3 \\ 0 & t+1 & -2 \\ -2 & 0 & t+1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 3 \\ t-1 & t+1 & -2 \\ t-1 & 0 & t+1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 1 & 0 & t+1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & t+2 & -5 \\ 0 & 1 & t-2 \end{vmatrix} \quad [C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \text{ et } C_3 \leftarrow C_3 - C_1] \\ &= (t-1)(t^2+1) \end{aligned}$$

- *Non diagonalisabilité sur $\mathbf{R}$.* Le polynôme $\chi_A = (X-1)(X^2+1)$ n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$. La matrice A n'est donc pas trigonalisable sur $\mathbf{R}$, donc *a fortiori* pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$.
- *Diagonalisabilité sur $\mathbf{C}$.* Comme $\chi_A = (X-1)(X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$, la matrice A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ (et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1).

2. • *Heuristique.* Soit :

$$f \mid \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associé à A . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = A$$

où $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Si nous déterminons une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: B$$

alors nous pourrions conclure que A et B sont semblables, d'après le théorème de changement de base. Nous cherchons donc trois vecteurs X_1, X_2, X_3 tels que :

- (a) $f(X_1) = AX_1 = X_2$;
- (b) $f(X_2) = AX_2 = -X_1$;
- (c) $f(X_3) = X_3$;

(d) la famille (X_1, X_2, X_3) est libre ;

ou, ce qui revient au même, tels que :

(a) $X_1 \in \text{Ker}(f^2 + \text{id})$;

(b) X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 ;

(c) la famille $(X_1, f(X_1), X_3)$ est libre.

- *Construction d'une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ idoine.* L'heuristique nous invite à poser :

$$X_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A).$$

Mettons-nous en quête d'un vecteur X_1 qui convient. Soit $(x \ y \ z)^\top \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned} (x \ y \ z)^\top \in \text{Ker}(f^2 + \text{id}) = \text{Ker}(A^2 + I_3) &\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff 2x + y - 2z = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{Ker}(f^2 + \text{id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Posons alors :

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 := f(X_1) = AX_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Il reste à vérifier que $\mathcal{B} := (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) &= \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -1 \end{vmatrix} \quad [L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2] \\ &= (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -13 \end{aligned}$$

Comme $-13 \neq 0_{\mathbf{R}}$, $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

- *Conclusion.* Par construction de la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = B$. D'après le théorème de changement de base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = P_{\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c}$$

qui s'écrit encore :

$$A = P B P^{-1}$$

$$\text{où } P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbf{R}).$$

- *Remarques.*

(a) Si nous connaissions le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, nous déduirions de la factorisation $\chi_A = (X - 1)(X^2 + 1)$ que :

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) = E_1(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id})$$

ce qui livrerait que la famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, sans aucun calcul.

(b) On peut démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$:

$$\underbrace{\left(\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C}) \quad M_1 = P M_2 P^{-1} \right)}_{M_1, M_2 \text{ semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{C})} \implies \underbrace{\left(\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \quad M_1 = P M_2 P^{-1} \right)}_{M_1, M_2 \text{ semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})} \quad [\text{classique HP}] .$$

Ce résultat permet de donner une solution alternative à la question 2. En effet, de :

$$\chi_A = (X - 1)(X - i)(X + i) = \chi_B$$

on déduit que les matrices A et B sont toutes deux semblables à $\text{diag}(1, -i, i)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Les matrices A et B sont donc semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Comme elles sont toutes deux à coefficients réels, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.