

Exercice :

• Soit $u \in \mathcal{L}(G^n)$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $u^p = \text{id}$

$\hookrightarrow X^p - 1 = \prod_{k=0}^{p-1} (X - e^{\frac{2\pi i k}{p}})$ annule u donc u est diagonalisable
Donc u est diagonalisable $\Rightarrow p_u \mid (X^p - 1)$ et $\text{Spec}(u) \subset \mathbb{U}_p$

Exercice 36 :

• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $u^3 + u^2 + u = 0_{\mathcal{L}(E)}$

1) Direct : Soit $y \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$. Alors, il existe $t \in E$ tq

$$u(t) = y \text{ et } u(y) = 0_E$$

$$\text{Par hypothèse, } u^3(t) + u^2(t) + u(t) = 0$$

$$\text{Donc } u^2(y) + u(y) + u(t) = 0$$

$$\text{Donc } u(t) = y = 0_E$$

$$\text{Par théorème du rang : } \overset{\dim}{\text{Ker}(u)} + \overset{\dim}{\text{Im}(u)} = \dim(E)$$

$$\text{Ainsi } \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E \text{ (car dim + direct)}$$

2) On remarque que $X^3 + X^2 + X$ annule u

$$\text{Or, } X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1) \text{ et } X \wedge (X^2 + X + 1) = 1 \text{ (car}$$

irréductibles, unitaires et distinctes)

Donc, d'après le lemme des noyaux :

$$\text{Ker}((X^3 + X^2 + X)(u)) = \text{Ker}(X(u)) \oplus \text{Ker}(X^2 + X + 1(u))$$

$$\text{Donc } E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{id})$$

• On sait d'après (*) et (**) que $\dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(\operatorname{Ker}(u^2 + u + \operatorname{id}_E))$

Il suffit de montrer [C]

$$[C] \quad \forall y \in \operatorname{Im}(u), \exists x \in E, u(x) = y$$

$$\text{Alors } (u^2 + u + \operatorname{id}_E)(y) = u^2(u(x)) + u(u(x)) + u(x)$$

$= 0$ par hypothèse

$$\text{Donc } y \in \operatorname{Ker}(u^2 + u + \operatorname{id}_E)$$

[C] claire

$$\text{Ainsi, } \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u^2 + u + \operatorname{id}_E) \text{ (par dim et +)}$$

3) Supposons u non bijective

Alors u est non injective

$$\text{Donc } \operatorname{Ker}(u) \neq \{0_E\}$$

$$\text{Donc } \exists x \in E \setminus \{0_E\}, u(x) = 0 = 0 \cdot x$$

Donc 0 est valeur propre

De plus, $X(X^2 + X + 1)$ annule u et possède une unique racine

$$0. \text{ Donc } \operatorname{Spec}(u) \subset \{0\}. \text{ Donc } \operatorname{Spec}(u) = \{0\}$$

Réduction des endomorphismes et des matrices 2

TD

Exercice 9:

- $\forall n \geq 2, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^2 - 3A + 4I_n = 0$. Posons $X^2 - 3X + 4 = P$
 $\hookrightarrow \Delta(P) = 9 - 16 = -7 < 0$ donc P admet deux racines distinctes
 λ et $\bar{\lambda}$ où $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ ($\lambda = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}, \bar{\lambda} = \frac{3-i\sqrt{7}}{2}$)
 On a $P(A) = 0$ donc $\text{Spec}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\lambda, \bar{\lambda}\}$. A est diagonalisable
 sur $\mathbb{C}$ car est annulé par P scindé à racines simples
- Notons $p = \dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n))$ et $q = \dim(\text{Ker}(A - \bar{\lambda} I_n))$
 Ainsi $\det(A) = \lambda^p \bar{\lambda}^{n-p} \in \mathbb{R}$
 Aussi, $\text{Tr}(A) = p\lambda + (n-p)\bar{\lambda}$
 $= p\text{Re}(\lambda) + p\text{Im}(\lambda) + (n-p)\text{Re}(\lambda) - i(n-p)\text{Im}(\lambda)$
 $= n\text{Re}(\lambda) + (2p-n)\text{Im}(\lambda)$
 Or $\text{Tr}(A) \in \mathbb{R}$ donc $2p-n = 0$ donc $p = \frac{n}{2}$
 Ainsi $\det(A) = \lambda^{n/2} \bar{\lambda}^{n/2} = (\lambda \bar{\lambda})^{n/2} = |\lambda|^n > 0$ car $\lambda \neq 0$

Exercice 10:

Q1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow A^2$ est diagonalisable

$\hookrightarrow \chi_A = X^2$ donc $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$. Si A est diagonalisable
 alors $A = 0I_2 = 0 \rightarrow$ absurde.

(Autre argument: A diagonalisable $\Rightarrow \mu_A$ est à racines simples

et $\mu_A | \chi_A \Rightarrow \mu_A = X \Rightarrow X$ annule $A \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \nmid$)

• la réponse est: Non.

Q2) Supposons A^2 inversible et diagonalisable donc π_{A^2} est scindé à racines simples

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}^*$ distinctes ($d = \deg \pi_{A^2}$) tel que $\pi_{A^2} = \prod_{k=1}^d (X - \alpha_k)$

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $\exists x > 0, \theta \in \mathbb{R}, z = x e^{i\theta}$. Les deux racines de z sont $\pm \sqrt{x} e^{i\theta/2}$
- $\pi_{A^2}(X^2) = \prod_{k=1}^d (X^2 - \alpha_k)$ annule A .
 $\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, posons β_k, β_k' les deux racines distinctes de α_k .
 Alors, $\pi_{A^2}(X^2) = \prod_{k=1}^d (X - \beta_k)(X - \beta_k')$
- Soient $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket, i \neq j$ tq $\beta_i = \beta_j$. Alors $\alpha_i = \alpha_j \rightarrow$ absurde
- Soient $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, tel $\beta_i = \beta_i' \rightarrow$ pas possible

CL: $\pi_{A^2}(X^2)$ est scindé à racines simples donc A est diag.

Exercice 11.

1) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que

H1) $u \circ v = v \circ u$

H2) u diagonalisable

H3) v diagonalisable

D'après H2), u est diagonalisable donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(u)} E_\lambda(u)$

Or, par H1), v stabilise $E_\lambda(u)$ pour $\lambda \in \text{Spec}(u)$

$\hookrightarrow$ Ainsi, par H3), $v|_{E_\lambda(u)}$ est diagonalisable. Il existe donc B_λ base de $E_\lambda(u)$ formée de vecteurs propres pour v (mais aussi pour u car $E \in E_\lambda(u)$)

• On donne les valeurs propres de u ($\lambda_1, \dots, \lambda_p$) où $p = |\text{Spec}(u)|$

Alors $B = B_{\lambda_1} \# \dots \# B_{\lambda_p}$ est base de E composée de vecteurs propres de u et v . Alors $\text{Mat}_B(u) \in D_n(\mathbb{C}), \text{Mat}_B(v) \in D_n(\mathbb{C})$

Suite ajoutée $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$ et A, B diagonalisables / $\mathbb{K}$

$\rightarrow$ Alors, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP \in D_n(\mathbb{K})$

• Posons $\varphi_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$
 $x \mapsto Ax$ l'endomorphisme canoniquement associé à A (et φ_B)

$\hookrightarrow$ Alors, comme $\text{Mat}_{B_i}(\cdot)$ est un morphisme $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_B \circ \varphi_A$
 donc φ_A diag et φ_B diag

$\hookrightarrow$ Donc, il existe B base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\text{Mat}_B(\varphi_A)$ et $\text{Mat}_B(\varphi_B)$ diagonales.

$\hookrightarrow$ Par th de changement de base.

$$\begin{cases} A = \text{Mat}_{B_i}(\varphi_A) = P_{B_i \rightarrow B} \text{Mat}_B(\varphi_A) P_{B \rightarrow B_i} \\ B = \text{Mat}_{B_i}(\varphi_B) = P_{B_i \rightarrow B} \text{Mat}_B(\varphi_B) P_{B \rightarrow B_i} \end{cases}$$

Exercice 13

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons $\mathcal{H}(n)$: " $\forall \mathbb{K}$ -ev E de dimension finie n ,
 $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)$, $v \circ u = u \circ v$, u, v bi-go. Alors, $\exists B$ base de E
 tq $\text{Mat}_B(u), \text{Mat}_B(v) \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{K})$ "

Ini: $n=1 \rightarrow$ claire

Héxé: $\forall n \geq 1$ tq $\mathcal{H}(n)$. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dim $n+1$, $u, v \in \mathcal{L}(E)$
 tq $u \circ v = v \circ u$ et u, v diagonalisables

$\hookrightarrow$ Comme χ_u scindé / $\mathbb{K}$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_u(\lambda) = 0$

Donc $E_\lambda(u) \neq \{0\}$

$\hookrightarrow v$ stabilise $E_\lambda(u) \rightsquigarrow v|_{E_\lambda(u)}$ est bien définie

$\hookrightarrow \chi_{v|_{E_\lambda(u)}} | \chi_v$ scindé / $\mathbb{K}$ donc $\chi_{v|_{E_\lambda(u)}}$ scindé sur $\mathbb{K}$

$\hookrightarrow$ Soit α une v_p de $v|_{E_\lambda(u)}$ et e_1 un $\vec{v}_p$ associé à $E_\lambda(u)$

Alors $e_1 \neq 0_E$, $v(e_1) = \alpha e_1$ et $u(e_1) = \lambda e_1$

↳ (e_i) est libre. On la complète en $B = (e_1, \dots, e_{n+1})$ base de E

↳ Alors :

$$\bullet \text{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \quad \bullet \text{Mat}_B(v) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & M \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

$$\bullet \text{Mat}_B(u) \times \text{Mat}_B(v) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\lambda & \lambda M + LB \\ \hline 0 & AB \end{array} \right) = \text{Mat}_{\underset{B}{u \circ v}} \\ = \text{Mat}_B(v \circ u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda\alpha & \alpha L + MA \\ \hline 0 & BA \end{array} \right)$$

↳ $X_u = (X - \lambda)X_A \Rightarrow X_A$ scindé sur $\mathbb{K}$. De même, X_B scindé sur $\mathbb{K}$.

↳ $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$, A, B trigos sur $\mathbb{K}$. En appliquant X_u à $\varphi_A, \varphi_B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}AP, P^{-1}BP \in \mathcal{Z}_n^+(\mathbb{K})$

↳ Ainsi :

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right) \times \text{Mat}_B(u) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & PAP^{-1} \end{array} \right) \in \mathcal{Z}_{n+1}(\mathbb{K})$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right) \text{Mat}_A(u) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & * \\ \hline 0 & P^{-1}BP \end{array} \right) \in \mathcal{Z}_{n+1}(\mathbb{K})$$

↳ Soit $\mathcal{C}$ la base de E tq $P_{\mathcal{C} \rightarrow B} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right)$.
 $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$ sont triangulaires

Exercice 16

Q1) Coups

Q2) Posons, pour tout $K \in [1, n]$, $\pi_K : E \rightarrow E$
 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_K$
 $d_1 : E \rightarrow E$, $n_1 : E \rightarrow E$
 $x \mapsto \sum_{K=1}^n \lambda_K \pi_K(x)$, $x \mapsto u(x) = \sum_{K=1}^n \lambda_K \pi_K(x)$