

TD - Reduction II

CCMP n°88 Q1) Soit $P \in K[X]$; $q \in \mathbb{Z}(S)$.

Ng: $P(u) = 0_{\mathbb{Z}(S)} \Rightarrow \forall \lambda \in \text{Spec}(u) \quad P(\lambda) = 0.$

Soit $\lambda \in \text{Spec}(u)$

$\exists x \in S \setminus \{0_S\}$ tel que $u(x) = \lambda x$

$$P(u)(x) = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n u^n(x)$$

Par récurrence on montre que: $\forall n \quad u^n(x) = \lambda^n x.$

Donc: $P(u)(x) = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n u^n(x) = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n \lambda^n x = P(\lambda) x.$

or: $P(u) = 0_{\mathbb{Z}(S)}$

donc: $P(u)(x) = 0_{\mathbb{Z}(S)}(x) = 0$

donc $P(\lambda) \underset{\neq 0_S}{x} = 0.$

Donc: $P(\lambda) = 0.$

Q2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} \stackrel{=0}{=} \\ u | \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow \mathcal{M}_n(R) \\ M \mapsto M + \text{tr}(M)A \end{array}$$

a) $N_1: X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 \in \text{Ann}(u)$

Soit $N \in \mathcal{M}_n(R)$

$$\begin{aligned} (u - \text{id}_E)^2(M) &= (u - \text{id}_E) \circ (M + \text{tr}(M)A - M) \\ &= u(\text{tr}(M)A) - \text{tr}(M)A \\ &= \text{tr}(M)u(A) - \text{tr}(M)A \\ &= \text{tr}(M)[A + \text{tr}(A)A] - \text{tr}(M)A \\ &= 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Méthode 1. $P = (X-1)^2$ annule u .

donc: $\text{Spec}(u) \subseteq \{1\} \quad (\mathbb{Q}_1)$

or: $u(A) = A + \text{tr}(A)A = 1 \times A$.

D'où: $\text{Spec}(A) = \{1\}$

Si u est diagonalisable, alors $u = \text{id}_E$

or: $u(I_n) = I_n + \text{tr}(I_n)A = I_n + nA \neq I_n$

Donc: u non diagonalisable

Méthode 2: u diagonalisable $\Leftrightarrow \mu_u$ scinde à racines simples sur $\mathbb{R}$

or: $\mu_u \nmid P$

donc: $\mu_u = X-1$

donc: $u = \text{id}_{\mathbb{R}}$ ce qui est absurde donc u non diag.

Ex 4 $A \in GL_5(\mathbb{R})$; $\text{Tr}(A) = 2$; $A^3 + A^2 - 2A = 0$

$A^2 + A - 2I_5 = 0$ car A est inversible

Donc: $X^2 + X - 2 \equiv P$ annule A .

$$P = (X-1)(X+2)$$

Alors: $\mu_A \mid P$ et donc par TFA polynomiale;

$$\mu_A \in \{ (X-1), (X+2), P \}$$

• Si $(X-1)$ annule A ; alors $A = I_5$

or: $\text{Tr}(I_5) = 5 \neq 2$

d'où: $(X-1)$ n'annule pas A .

• Si $(X+2)$ annule A , alors $A = -2I_5$.

or: $\text{tr}(-2I_5) = -10 \neq 2$

Donc: $(X+2)$ n'annule pas A

Donc: $\mu_A = P$.

Donc: $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -2\}$

Raisonnons par analyse-synthèse

(A) On sait que la trace de A est égale à la somme des vp compte avec leurs multiplicités.

Notons K la multiplicité de la racine 1 de χ_A et m celle de la racine -2 .

Alors: $K \times 1 - 2 \times m = 2$

donc: $K = 2(1+m)$

donc: K est paire.

De plus, la multiplicité des racines est comprise entre

1 et 5. Donc: $K=2$ ou $K=4$

S: $K=2$:

$$2 - 2 \times m = 2 \quad \text{donc: } m = 0.$$

Ce qui est absurde.

S: $K=4$:

$$4 - 2m = 2 \quad \text{donc } m = 1$$

⑤ Le seul couple obtenu est $(K=4, m=1)$

Donc:
$$X_A = (X-1)^K (X+2)^m = (X-1)^4 (X+2).$$

Ex 14 (p1) Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^n$, $p \in \mathbb{N}^*$

• S: $\exists i, j \in \mathbb{N}$ tq $i \neq j \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j$

$$\delta = \min \{ |\lambda_i - \lambda_j|, (k, l) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } \lambda_k \neq \lambda_l \}$$

• S: $\lambda_i = \lambda_n$; $\delta = 1$

Ng: $A = \left(\lambda_1 + \frac{\delta}{1 \times p}, \dots, \lambda_n + \frac{\delta}{np} \right)$ sat $\lambda_i \neq \lambda_j$

→ Cas 1: $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$

Supposons qu'il existe $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j$ et

$$\lambda_i + \frac{\delta}{ip} = \lambda_j + \frac{\delta}{jp}$$

Comme $\lambda_i = \lambda_j$; $\boxed{\delta} \left(\frac{1}{ip} - \frac{1}{jp} \right) = 0.$

or: $i \neq j$ done $\frac{1}{ip} - \frac{1}{jp} \neq 0$ Absurde.

→ Cas 2: $\exists (i, j) \in \mathbb{N}, \mathbb{N}^2$ tq $i \neq j \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j$

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}, \mathbb{N}^2$ tq que $i \neq j$

• Si $\lambda_i = \lambda_j$; cf cas 1.

• Si $\lambda_i \neq \lambda_j$:

$$\lambda_i + \frac{\delta}{ip} = \lambda_j + \frac{\delta}{jp}$$

done $\lambda_i - \lambda_j = \delta \left(\frac{1}{jp} - \frac{1}{ip} \right)$

or $\delta \leq |\lambda_i - \lambda_j| = \left| \delta \left(\frac{1}{jp} - \frac{1}{ip} \right) \right|$

done $1 \leq \left| \frac{1}{ip} - \frac{1}{jp} \right|$

or: Supp $1 \leq i, j \leq n$ done $1 \leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right) \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$

$\mathbb{C}$ qui est algébrique.

Q2) $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : A \text{ est diag sur } \mathbb{C} \}$

Ng. $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\exists T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C}) ; \exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$M = Q T Q^{-1}$$

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{\delta}{1 \times p} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n + \frac{\delta}{n \times p} \end{pmatrix} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Q3: $(T_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ diagonalisable car ses λ_p sont
 2×2 distincts (Q1)

$$\underset{\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})}{M_p} = Q T_p Q^{-1} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} Q T Q^{-1} = M$$

par continuité du produit matriciel.

Q3) $f: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ est l'op. $A \mapsto \chi_A(A)$

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\chi_A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \underbrace{[X \mathbb{I}_n - A]_{i, \sigma(i)}}_{\delta_{i, \sigma(i)} X - [A]_{i, \sigma(i)}}$$

donc $\chi_A(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{i, \sigma(i)} A - [A]_{i, \sigma(i)})$

les coeffs de χ_A sont des poly en les coeffs de A .

Donc: f est l'op sur $M_n(\mathbb{C})$ car polynôme en les coefficients.

Q4) Montrons que f est nulle sur $P_n'(\mathbb{C})$

Soit $A \in P_n'(\mathbb{C}) \exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=D} P^{-1}$$

$$\chi_A = \chi_D = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$q_1, \dots, q_n \in \mathbb{C} \quad \underline{\text{L}} \quad X_A = X_B = \sum_{k=0}^n q_k X^k$$

$$\sum_{k=0}^n q_k A^k = P \begin{pmatrix} q_0 + q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_0 + q_1 \lambda_n + \dots + q_n \lambda_n^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= 0_{n,n}$$

Donc: est nulle sur $\mathbb{D}_n'(\mathbb{C})$.

CCMP n°33

$$u \in \mathcal{L}(\mathcal{E}) \text{ et } \dim(\mathcal{E}) < +\infty$$

$$u^3 + u^2 + u = 0.$$

Q1) Montrer $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = \mathcal{E}$.

D'après le théorème du rang on a :

$$\dim(\mathcal{E}) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$$

Montrer $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ ce qui permettra de conclure.

Réponse Claire.

Réponse Soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$

$$\exists y \in \mathcal{E} \text{ tel que } x = u(y)$$

$$\underline{\text{Or}} \quad \underbrace{u^3(y)}_{=0} + \underbrace{u^2(y)}_{=0} + \underbrace{u(y)}_{=x} = 0.$$

Donc: $x \geq 0$.

D'où $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

Donc: $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Q2 Considérons $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$

P annule u

X et $(X^2 + X + 1)$ sont premiers entre eux car
irréductibles et non associés

a) D'après le lemme des noyaux:

$$\text{Ker}(P(u)) = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{id})$$

$= 0 \oplus 0$

D'où: $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{id})$

b) On remarque que:

$$\dim(\text{Ker}(u^2 + u + \text{id})) = \text{rg}(u) \text{ par Grassman et des questions précédentes}$$

Soit $x \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{id})$

donc $u^2(x) + u(x) + x = 0$

alors: $x = -u^2(x) - u(x) = -u(u(x) + x)$

Donc: $x \in \text{Im}(u)$

On conclut car $\text{Ker}(u^2 + u + \text{id}) \subset \text{Im}(u)$

et $\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\text{Ker}(u^2 + u + \text{id}))$

Q3) Comme u est non bijectif alors 0 est une vp

$\text{Spec}(u) \subset \{0\}$

Donc $\text{Spec}(u) = \{0\}$