

↳ Exercice 1 : (TD)

(7) $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

On sait $(1+x)^{1/2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \frac{1/2}{1!}x + \frac{1/2(1/2-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1$ (par composition)

↳ $u_n \sim -\frac{1}{8n} \leq 0$
 Or, par théorème de comparaison des séries à termes de signe constant, $\sum u_n$ diverge

↳ $|v_{n+1}| - |v_n| = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq 0$
 $v_{n+1} v_n = \frac{-1}{4\sqrt{n(n+1)}} \leq 0$
 $v_n \rightarrow 0$

} $\Rightarrow$ d'après le critère sur les séries alternées, $\sum \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

↳ Donc $\sum u_n$ converge.

(8) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n!}{n^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-n}}{\sqrt{n}} > 0$ (d'après Stirling)

Donc, par théorème de comparaison sur les équivalents, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Or, $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (croissance comparée) et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc, par théorème de compa., $\sum v_n$ converge.

2^e solution

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n^n}{(n+1)^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{n(\ln(n) - \ln(n+1))}$
 $= e^{n(\ln(1 - \frac{1}{n+1}))} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2}))} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1} < 1$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge

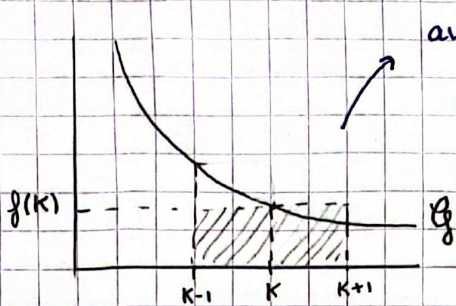
(9) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \right) - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \right)$

$(1+x)^{-1/2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$
 $= \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3} > 0$

Or, $\sum \frac{1}{n^3}$ converge donc, par théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge absolument

2^e solution: (comparaison série / intégrale)



avec $f: x \mapsto \frac{1}{x^3}$

De plus f est continue, positive et $\downarrow$ sur $[1; +\infty[$

$$\forall K \geq 2, \int_K^{K+1} \frac{1}{t^3} dt \leq \frac{1}{K^3} \leq \int_{K-1}^K \frac{1}{t^3} dt$$

Soient $(M, m) \in \mathbb{N}^2, M \geq m \geq 2$

En sommant l'inégalité, et relation de Charles,

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^3} dt \leq \sum_{K=n+1}^N \frac{1}{K^3} \leq \int_n^N \frac{1}{t^3} dt$$

$$\text{Donc, } \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_{n+1}^{N+1} \leq \sum_{K=n+1}^N \frac{1}{K^3} \leq \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_n^N$$

$$\text{Donc, } \frac{(n+1)^{-2} - (N+1)^{-2}}{2} \leq \sum_{K=n+1}^N \frac{1}{K^3} \leq \frac{n^{-2} - N^{-2}}{2}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{-2}}{2} \leq \sum_{K=n+1}^{+\infty} \frac{1}{K^3} \leq \frac{n^{-2}}{2}$$

Par passage à la limite, lorsque $N \rightarrow +\infty$,

$$\frac{(n+1)^{-2}}{2} \leq \sum_{K=n+1}^{+\infty} \frac{1}{K^3} \leq \frac{n^{-2}}{2}$$

Par encadrement, $\sum_{K=n+1}^{+\infty} \frac{1}{K^3} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2}$

Exercice 27 (Cours)

γ est bien définie sur $]1; +\infty[$ d'après le théorème de RIEMANN

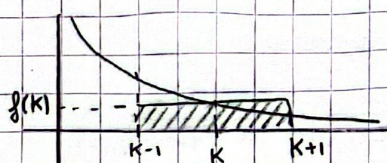
Soit $x > 1$, fixé:

$f: t \mapsto \exp(-x \ln(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [1; +\infty[$

Soit $t \in I$, $f'(t) = -\frac{x}{t} \exp(-x \ln(t)) \leq 0$

Ainsi, f est $\downarrow$ sur I

De plus, f est positive sur I ,



$$\Rightarrow \int_K^{K+1} f(t) dt \leq f(K) \leq \int_{K-1}^K f(t) dt$$

Soit $N \geq 2$, sommions pour K allant de 2 à N

Par relation de Charles,

$$\int_2^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{K=2}^N f(K) \leq \int_1^N f(t) dt$$

$$\text{donc, } \int_2^{N+1} f(t) dt + f(1) \leq \sum_{K=1}^N f(K) \leq \int_1^N f(t) dt + f(1)$$

• D'un côté: $\int_1^N t^{-x} dt = \left[\frac{1}{1-x} t^{1-x} \right]_1^N = \frac{1}{1-x} (N^{1-x} - 1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1}$

• De l'autre: $\int_1^{N+1} f(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{2^{1-x}}{x-1}$

Comme γ est bien définie en $x > 1$,

$$\frac{2^{1-x}}{x-1} + 1 \leq \gamma(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

donc $\gamma(x) \sim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1}$

Exercice 3: (TD)

1) Montrons que $\sum_{k=1}^n k! \sim n!$ $n \rightarrow +\infty$

Soit $n \geq 1$, $u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n-2)!}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k!}{n!} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1 \text{ donc } 0 \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-2} 1 = \frac{n-2}{n(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc, par S_n théorème d'encadrement, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Donc, $\sum_{k=1}^n \frac{k!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Donc, $\sum_{k=1}^n k! \sim n!$

Ainsi, $u_n \sim \frac{1}{n^2} > 0$ car $\sum \frac{1}{n^2}$ cvg donc $\boxed{\sum u_n \text{ cvg A}}$

2) On sait $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n}$ (par comparaison séries / intégrale)

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \geq 2, u_n &= \frac{(-1)^n}{S_n} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{S_n}} = \frac{(-1)^n}{S_n} \left(1 - \frac{(-1)^n}{S_n} + o\left(\frac{1}{S_n}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{S_n} - \frac{1}{S_n^2} + o\left(\frac{1}{S_n^2}\right) \\ &\underset{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ x_n}}{=} \underset{x_n}{\frac{(-1)^n}{S_n}} - \underset{y_n}{\frac{1}{S_n^2}} + o\left(\frac{1}{S_n^2}\right) \end{aligned}$$

Montrons que $\sum x_n$ converge

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n x_{n+1} \leq 0 \\ (|x_n|)_{n \geq 2} \downarrow \\ |x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{d'après le critère spécial des séries alternées} \\ \sum x_n \text{ cvg} \end{array}$$

Montrons que $\sum y_n$ diverge

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq y_n = \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{4n^2}\right) \sim \frac{1}{4n^2}$$

$$\sim \frac{1}{4n} > 0 \text{ (car } \sum \frac{1}{4n} \text{ diverge)}$$

Donc, d'après le théorème de comparaison sur les équivalents, $\sum y_n$ diverge
Alors $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$

Exercice 8:

$$\sum_{n \geq 2} \underbrace{(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}}_{u_n}$$

Bmq: $\forall n \geq 2, 0 \leq \frac{1}{n} \leq |u_n|$ donc $\sum |u_n|$ diverge

$$\hookrightarrow \forall n \geq 2, u_n u_{n+1} \leq 0$$

$$\hookrightarrow |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (croissance comparée)}$$

$$\hookrightarrow f: [3; +\infty[\rightarrow \mathbb{K} \text{ } x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\text{De plus, } \forall x \geq 3, f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \leq 0 \text{ donc } (|u_n|)_{n \geq 3} \downarrow$$

Par CSA, $\sum u_n$ converge

• Soit $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^n u_{2k} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{2k+1}$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln(2) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} H_n \quad (\text{avec } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

Pour $n = 2m$:

$$\sum_{k=2}^{4m} u_k = \frac{\ln(2)}{2} H_{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} H_{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\ln(2k)}{2k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} - \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2} S_{2m}$$

$$\left(\sum_{k=m}^{2m-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } S_{4m} - \frac{1}{2} S_{2m} &= \frac{\ln(2)}{2} H_n - \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\ &= \sum_{k=2m}^{4m} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=m}^{2m} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=m}^{2m} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\ &= \sum_{k=2m}^{4m} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=m}^{2m} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=m}^{2m} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\ &= \sum_{k=2m}^{4m} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=m}^{2m} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=m}^{2m} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\ln^2(4m)}{2} - \frac{\ln^2(2m)}{2}$$

Avec comparaison
séries - intégrales

$\Leftarrow$

$$\hookrightarrow \frac{\ln^2(2m) - \ln^2(m)}{2}$$