

①

TD - Procédés sommatoires discrets

Ex 1

Q1) Soit na^*

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-1} e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-1} \left(-1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-1} - \frac{1}{2ne} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc: $C_n \stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2ne} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

d'où: $C_n \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2ne} < 0$

On sait que $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum -\frac{1}{2ne}$ diverge

Par théorème de comparaison à une série à termes

de signe constant, $\sum C_n$ diverge

Q2) $(U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$

$\sum U_n$ converge $\iff (\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

or: $\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

donc $\sum U_n$ diverge.

Autre solution: Soit $n \in \mathbb{N}$

① $U_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$

or: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$)

Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum U_n$ diverge.

② $U_n = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0 \dots$

(2)

Q4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = \frac{3^n}{n}$

$$= \frac{e^{n \ln(3)}}{n}$$
$$= \frac{h(3) e^{n h(3)}}{n h(3)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{dne}$$

Donc: $\sum U_n$ diverge grossièrement.

Q5) $\left(U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$

(H1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_{n+1} U_n \leq 0$

(H2) $|U_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

(H3) $(|U_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $(n+1)^2 \geq n^2$

$$(n+1) \geq n$$

donc $(n+1)^2 + (n+1) > n^2 + n$. Décroissance de $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$
sur $\mathbb{N}_+$ donc $U_{n+1} < U_n$

Par critère spécial des séries alternées,

$$\sum U_n \text{ Converge.}$$

Autre solution

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}}_{\sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

or : $\bullet \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ Converge (CS&A)}$

$\bullet \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2} \text{ ACR donc cr. ; thm comparaison}$

$$\sum U_n \text{ Converge.}$$

3)

Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$Q_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}$$

$$= n^{\frac{1}{n}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

$$= -n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n}} \left(e^{\frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n})} \right)$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} -n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n}} \left(e^{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \right)$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} -n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} -n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

$$\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}}\right)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

La série $\sum Q_n$ est de même nature que $\sum n^{\frac{1}{n}-2}$

$$\forall n \geq 2 \quad 2 - \frac{1}{n} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

donc: $-(2 - \frac{1}{n}) \ln(n) \leq -\frac{3}{2} \ln(n)$

donc $\exp(-\ln(n)(2 - \frac{1}{n})) \leq \exp(-\frac{3}{2} \ln(n))$

d'où: $n^{\frac{1}{n}-2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$

or. $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ Converge (Riemann; $\frac{3}{2} > 1$)

Donc par théorème de comparaison pour les

Series à termes positives; $\sum U_n$ converge.

q6) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$U_n = \frac{\ln(n)}{\ln(2n)} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{e^{2n}} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty}$$

or. $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ Converge (géo; $0 < \frac{1}{e} < 1$)

Par théorème de comparaison pour les séries

à termes positives; $\sum U_n$ converge.

q3) Autre méthode

Soit $n \geq 1$.

$$\cdot (n+1)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n+1)\right)$$

$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

⑨

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n}$$

Ans: $(n+1)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\ln(1+n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)$

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Proof:

$$O_n = \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)$$

$$= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} + o\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\sim \frac{1}{n^2} > 0.$$

(5)

Ex 55
du cours.Montrons que $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et calculons sa valeur.

On pose $\left(U_n = \frac{(-1)^n}{3n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

(H1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} U_n \leq 0$

(H2) $|U_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

(H3) $(|U_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Par le critère spécial des séries alternées :

$$\sum U_n \text{ converge.}$$

Calculons désormais la valeur de la somme.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \sum_{n=0}^N U_n &= \sum_{n=0}^N \int_0^1 (-t^3)^n dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{n=0}^N \underbrace{(-t^3)^n}_{\substack{\text{G.S. } -1, 1 \\ \text{G.S. } -1, 1 \\ \text{G.S. } -1, 1}} dt \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{linéarité de} \\ \text{l'intégrale.} \end{array} \\
 &= \int_0^1 \frac{1 + (-1)^{N+2} t^{3(N+1)}}{1 + t^3} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-1)^{N+2} t^{3(N+1)}}{1+t^3} dt}_{= I_N}
 \end{aligned}$$

on a: $\forall N \in \mathbb{N}$

$$0 \leq |I_N| \leq \int_0^1 \frac{t^{3(N+1)}}{\underbrace{1+t^3}_{\geq 1}} dt \leq \int_0^1 t^{3(N+1)} dt \leq \frac{1}{3N+4} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$$

Par encadrement: $I_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$

Donc: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt.$

On remarque que -1 est racine de $1+X^3$.

donc:

$\begin{array}{r} 1+X^3 \\ -(X^3+X^2) \\ \hline -X^2+1 \\ -(-X^2-X) \\ \hline X+1 \\ -(X+1) \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} X+1 \\ \hline X^2-X+1 \end{array}$
--	--

Autre méthode:

$$z^3 = -1 \quad (z \in \mathbb{C})$$

Donc: $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$

Donc: $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \mathbb{Q}$ que

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2-X+1}$$

6

donc :

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{\alpha}{(x+1)} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2-x+1}$$

• En multipliant par $(x+1)$ et en évaluant en -1

$$\boxed{\frac{1}{3} = \alpha}$$

• En évaluant en 0

$$1 = \frac{1}{3} + \gamma \quad \text{d'où} \quad \boxed{\gamma = \frac{2}{3}}$$

• En évaluant en 1

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \beta + \frac{2}{3}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\beta = -\frac{1}{3}}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \int_0^1 \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}}{t^2-t+1} dt$$

$$= \frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t-2}{t^2-t+1} dt$$

$$= \frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt \right]$$

$$= \frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt - 3 \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt \right)$$

$$= \frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{6} \left(\left[\ln(t^2-t+1) \right]_0^1 - 3 \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt \right)$$

$$= \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt$$

On a: $\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\left(\frac{2x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2t-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} dt$$

$$u = \frac{2t-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{2}{3} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{2}{3} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{4}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

7

θ est l'unique angle entre $3-\pi$ et 2π tel que

$$\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

donc: $\theta = \frac{\pi}{6}$

2^{ème} $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \frac{1}{3} \ln(e) + \frac{4}{3} \frac{\pi}{6}$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \frac{1}{3} \ln(e) + \frac{2\pi}{3}$

②

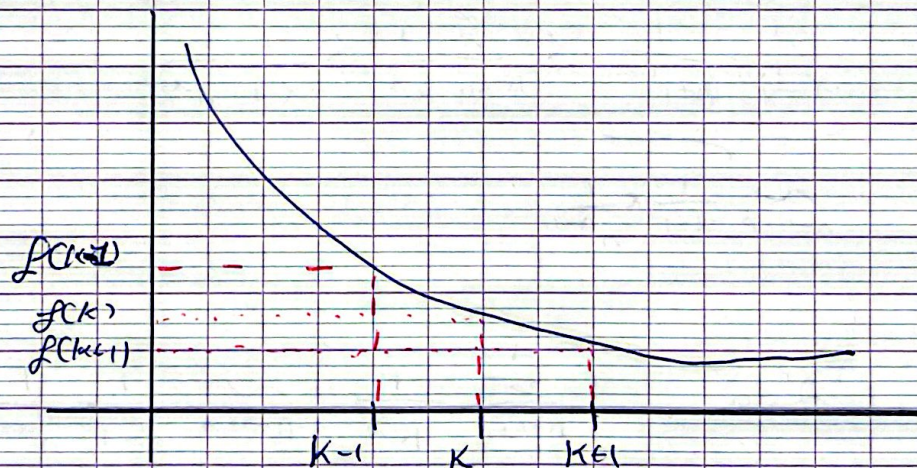
Ex 26
du cours

$\alpha > 1$ $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ~~diverge~~ converge

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Équivalent ?

$$f: \begin{array}{|l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha} \end{array}$$



d'ici: $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx$

Soient n, N entiers quel que: $1 \leq n+1 \leq N$

On somme pour k allant de $n+1$ à N

$$\sum_{k=n+1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx$$

donc: $\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$

donc $\underbrace{\left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{n+1}^{N+1}}_{= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right)} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \underbrace{\left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_n^{N+1}}_{= \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)}$

les 3 termes sont de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ qd $N \rightarrow +\infty$

$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

$\sim \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

D'où: $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$