

Exercice 8 :

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un ep et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants mutuellement tels que $\sum P(A_n)$ diverge.

1) CF Cours: $A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$ $A_\infty = \{\omega \in \Omega \mid \{n \in \mathbb{N}^* : \omega \in A_n\} \text{ est infini}\}$
 $=$ "on a obtenu pour une ∞ de n que des piles entières $(n-1)10^6 + 1$ et $n10^6$ "

2) Montrons que $P(A_\infty) = 1$

$$\hookrightarrow \overline{A_\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, P\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}\right) = P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right)$$

$$\text{Si } N \geq n, P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k))$$

$$\left[\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \leq e^{-x} \right] \Rightarrow P\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{A_k}\right) \leq \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)}$$

$$\text{Or, } \sum_{k \geq n} P(A_k) \text{ divg donc } \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ par théorème d'encadrement,}$$

$$\text{Donc, } 0 \leq P(\overline{A_\infty}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = 0 \text{ donc } \boxed{P(A_\infty) = 1}$$

- 3) On lance un déferiment une $= 0$ pièce. On cherche la probabilité d'obtenir 10^6 piles consécutifs.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, X_k = \begin{cases} 1 & \text{si pile au } k^e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$A_1 = \bigcap_{k=1}^{10^6} (X_k = 1), A_2 = \bigcap_{k=1+10^6}^{2 \cdot 10^6} (X_k = 1), \forall n \geq 1, A_n = \bigcap_{k=(n-1)10^6+1}^{n \cdot 10^6} (X_k = 1)$$

- D'après l'absence de chevauchement, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants

$$\sum P(A_n) \text{ DVG, et, d'après Q2), } P(A_\infty) = 1$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^{10^6}$$

$$\text{Or, } A_\infty \subset \text{"on a } 10^6 \text{ piles consécutifs"} \text{ donc } 1 = P(A_\infty) \leq P(\text{"on a } 10^6 \text{ piles consécutifs"}) \leq 1$$

Exercice 119

1) Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, montrons que $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ diagonalisable / $\mathbb{R} \iff (x_1 \neq x_2)$

[E] Supposons $x_1 \neq x_2$

$\chi_A(X) = (X - x_1)(X - x_2)$ (Matrice 2×2), comme $x_1 \neq x_2$

$$\begin{cases} 1 \leq \dim(E_{x_1}(A)) \leq \text{mult}(x_1, \chi_A) = 1 \\ 1 \leq \dim(E_{x_2}(A)) \leq \text{mult}(x_2, \chi_A) = 1 \end{cases}$$

Donc A est diagonalisable

[E] Supposons A diagonalisable. Par l'absurde, on suppose $x_1 = x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

Alors, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $T = P^{-1} \lambda I_n P$ donc $T = \lambda I_n$

Or $[T]_{1,2} = 1 \neq 0 = [\lambda I_n]_{1,2}$. Absurde

Donc T est diag ssi $(x_1 \neq x_2)$

2) Donc A est diagonalisable ssi $x_1 \neq x_2$

$$(X_1 \neq X_2) = (X_1 = X_2)^c$$

$$(X_1 = X_2) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X_1 = i, X_2 = i)$$

$$\text{Donc, par } \sigma\text{-add, } P(X_1 = X_2) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i, X_2 = i) \quad (*)$$

$$X_1 \perp X_2 \Rightarrow (*) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) P(X_2 = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} (1-p)^{i-1} p$$

$$P(X_1 = X_2) = p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{i-1} = p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2}$$

$$\text{donc } P(X_1 \neq X_2) = 1 - P(X_1 = X_2) = \frac{2-2p}{2-p}. \text{ On note A : "la matrice est inversible"}$$

$$\text{Alors } P(A) = \frac{2-2p}{2-p}$$

Exercice 5:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n|N) = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (N = kn) \right)$$

$$\hookrightarrow N(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$$

$$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, P(N=n) = \frac{1}{\sum_{d|n} d^5}$$

Soit $x \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^x$ distinctes

$$P\left(\bigcap_{k=1}^r (X_{p_k} = 1)\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^r p_k | N\right) \stackrel{\text{Gauss}}{=} P\left(\prod_{k=1}^r p_k | N\right) = P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (N = k \prod_{l=1}^r p_l)\right)$$

$$\stackrel{\sigma\text{-add}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} P(N = k \prod_{l=1}^r p_l)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sum_{d|k \prod_{l=1}^r p_l} d^5} \cdot \frac{1}{(k \prod_{l=1}^r p_l)^5}$$

$$= \left(\prod_{l=1}^r \frac{1}{p_l^5} \right) \times \frac{1}{\sum_{d|1} d^5} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^5} = \prod_{l=1}^r \frac{1}{p_l^5}$$

Soit $p \in \mathcal{P}$, on pose $X_p = 1_{(p|N)}$

$$P(X_p = 1) = P(p|N) = P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (N = kp)\right) \stackrel{\sigma\text{-add}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} P(N = kp) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sum_{d|kp} d^5} = \frac{1}{p^5}$$

$$\text{Donc, } \prod_{p \in \mathcal{P}} P(X_p = 1) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^5} = P\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} (X_p = 1)\right)$$

Exercice 4

- On lance une ∞ de fois une pièce

X = rang d'apparition du premier Pile Pile consécutif

Soit $n \in \mathbb{N}$, on se place dans le cas où on fait n tirages. Donc $\Omega_n = \{0,1\}^n$

Notons $S_n = \{\omega \in \Omega_n \mid \omega \text{ n'a pas de "pile-pile"}\}$

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |S_{n+2}| = |S_{n+1}| + |S_n|$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = |S_n|$

Heuristique

$$x_1 = 2, (1, 0)$$

$$x_2 = 3, (10, 01, 00)$$

$$x_3 = 5, (101, 001, 100, 010, 000)$$

On a bien $x_3 = x_2 + x_1$

Démo : Fixons $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

- Soit S_n^1 et $S_n^0 \subset \Omega_n$ tq tout élément de S_n^1 finissent par un 1 et tout élément de S_n^0 finissent par 0

$$\hookrightarrow |S_{n+1}^0| = |S_n^1| + |S_n^0| = |S_n|$$

$$\hookrightarrow |S_{n+1}^1| = |S_n^0|$$

$$\hookrightarrow |S_n| = |S_n^1| + |S_n^0|$$

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= |S_{n+2}| \\ &= |S_{n+2}^1| + |S_{n+2}^0| = |S_{n+1}^0| + \underbrace{|S_{n+1}^1| + |S_{n+1}^0|}_{x_{n+1}} \\ &= x_n + x_{n+1} \end{aligned}$$

- Donc, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
Ensuite, $A_1, \dots, A_n$ variables aléatoires qui valent 1 si le i -ème tirage est pile, 0 sinon.

$$\text{Et donc, } P(X > n) = P((A_1, \dots, A_n) \in S_n) = \frac{x_n}{2} \frac{|S_n|}{|\{0,1\}^n|}$$

$$= \frac{|S_n|}{|\Omega_n|} = \lambda \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{1.618^n} + \mu \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{0.618^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Donc } (X = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (X > n)$$

$$\text{Ainsi, comme } n \geq 1, \forall n \geq 1, (X > n+1) \subset (X > n)$$

Par $\mathcal{P}^0$ de la proba, $P(X > n) \rightarrow P(X = +\infty)$, donc, par l de la limite, $P(X = +\infty) = 0 \hookrightarrow 0$

2^e solution :

- X = rang d'apparition du premier pile-pile
 $X(\Omega) = \mathbb{N}_{\geq 2}$, F_K la face au K -ème, $K \geq 1$

$$\hookrightarrow P(X=2) = P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2) = P(\bar{F}_1)P(\bar{F}_2) = \frac{1}{4}$$

$$\hookrightarrow P(X=3) = P(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3) = \frac{1}{8}$$

• Soit $n \geq 2$

$$P(X = n+2) \stackrel{\text{FPT}}{=} P(X = n+2 | F_1) P(F_1) + P(X = n+2 | \bar{F}_1) P(\bar{F}_1)$$

$\hookrightarrow = P(X = n+1)$ $\nearrow 1/2$

$\hookrightarrow$ pas possible avec ce xce

Utilisons $(F_1, \bar{F}_1, F_2, \bar{F}_1 \cap F_2)$:

$$P(X = n+2) \stackrel{\text{FPT}}{=} P(X = n+2 | F_1) P(F_1) + P(X = n+2 | \bar{F}_1 \cap F_2) P(\bar{F}_1 \cap F_2)$$

$\hookrightarrow = P(X = n+1) = a_{n+1}$ $\nearrow = P(X = n) = a_n$

$\hookrightarrow 0$ $\hookrightarrow 1/4$

Ainsi, $a_{n+2} = \frac{1}{2} a_{n+1} + \frac{1}{4} a_n \quad (\forall n \geq 2)$

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{4} & a_0 = 1 \\ a_3 = \frac{1}{8} & a_1 = 0 \end{cases}$$

Résolution: $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$

$\hookrightarrow x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$

$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \right)^n + \mu \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \right)^n$

$\hookrightarrow$ Pour $n=0$: $\lambda + \mu = 1$ $\Rightarrow \lambda = \frac{-1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow$ Pour $n=1$: $\frac{\lambda + \mu}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}(\lambda - \mu) = 0$ $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$

Donc $P(X = n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n$

Ainsi $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = \dots = 1$