

TD - Probabilité 1

Ex 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$X_n = \text{"résultat du dé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer"}$

$$X_n \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

$$(X_n = 6) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} ((X_i = 2) \cup (X_i = 4)) \right)$$

indépendance des lancers

$$P((X_n = 6) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} ((X_i = 2) \cup (X_i = 4)) \right)) = \frac{1}{6} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

T : "les chiffres sont pairs"

T : "rang d'apparition du premier 6"

$T(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $(T=k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un séq.

Par formule des probas totales:

$$P(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T=k)$$

le 1^{er} 6 arrive au $k^{\text{ème}}$ lancer
et ceux d'avant sont pairs

$$(X_n = 6) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i \in \{2, 4\}) \right)$$

$$P(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{4}$$

D'où

$$P(T) = \frac{1}{4}$$

2nd Solution :

$T =$ "Et les chiffres sont pairs"

$X =$ rang d'apparition du 1^{er} 6.

On repète de façon indépendante une exp de Bernoulli de proba de succès $\frac{1}{6}$ (obtenir 6 lors d'un lancer)

de manière indépendante

$X =$ rg du 1^{er} succès.

Donc : $X \sim g(\frac{1}{6})$

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

La formule des probas totale par rapport à

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} P(X=k) \quad \text{give:}$$

$$P(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T \cap (X=k))$$

$$P(X=k) \times P(T|X=k) = \frac{2}{5}$$

on a eu 2 ou 4 lors des $k-1$ 1^{er} lancers
ou on a 5 possibilités (le 6^{ème} est exclu).

$$P(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right) = \frac{1}{5}$$

Ex 82
du Cours

q1) On tire X le nbr de boules rouges tirées

$$X(\Omega) \subset \mathbb{I}0, a\mathbb{I}$$

Soit $k \in \mathbb{I}0, a\mathbb{I}$

$$P(X=k) = \frac{\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

← n choix possibles
a+b boules sans
répétitions et sans
ordre

(*)

(+) choix de k rouges sans ordre et sans répét.

(**) Choix de $n-k$ noires, sans ordre et sans répétition

Q2) $P(X \in \mathbb{I}0, a\mathbb{I}) = 1$

car $(X \in \mathbb{I}0, a\mathbb{I}) = \Omega$

Q3) $\sum_{k=0}^a P(X=k) = P\left(\bigcup_{k=0}^a (X=k)\right) = 1$

Donc $\sum_{k=0}^a \binom{a}{k} \times \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$ (Vandermonde)

$$(1+x)^a \times (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$$

$$\left(\sum_{i=0}^a \underbrace{\binom{a}{i}}_{\alpha_i} x^i \right) \left(\sum_{i=0}^b \underbrace{\binom{b}{i}}_{\beta_i} x^i \right) = \sum_{i=0}^{a+b} \underbrace{\binom{a+b}{i}}_{\gamma_i} x^i$$

donc : $\sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_{n-i} = \gamma_n$

$$\sum_{i=0}^n \binom{a}{i} \binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n} \text{ (Vandermonde)}$$

(P1) Soit $j \in \mathbb{N}$

$$P(X=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=j) \cap (Y=k))$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e j! k!}$$

$$= \frac{j}{e j!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} + \frac{1}{e j!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$$

$$= \frac{j}{e j!} \left(\frac{1}{2}\right)^j e^{1/2} + \frac{1}{e j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$$

$$= \frac{j}{j!} \left(\frac{1}{2}\right)^j e^{-1/2} + \frac{1}{e j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} e^{1/2}$$

$$P(X=j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{e^{-1/2}}{j!} \left[j + \frac{1}{2} \right]$$

De même;

$$\text{HKGW}^* \quad P(Y=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{e^{-1/2}}{k!} \left[k + \frac{1}{2} \right]$$

$$(P2) \quad P((X,Y) = (0,0)) = 0.$$

$$P(X=0) P(Y=0) = \frac{1}{4e} \neq 0$$

D'où :

$$X \not\sim Y$$

Q1) Soit $i \in \{1, \dots, N\}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$(X_i \leq n) = \bigcup_{k=1}^n (X_i = k)$$

$$P(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^n P(X_i = k)$$

$$= \sum_{k=1}^n p q^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = p \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = 1 - q^n$$

$$P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leq n) = q^n$$

Q2) $T = \min_{i \in \{1, \dots, N\}} (X_i)$ Propriété: $(X=n) \cap (X \leq n-1) = \emptyset$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$(T > n) = \bigcap_{k=1}^N (X_k > n)$$

$$P(T > n) = \prod_{k=1}^N P(X_k > n) = \prod_{k=1}^N q^n = q^{nN} = (q^N)^n$$

$$P(T \leq n) = 1 - q^{nN}$$

$$(T=n) \cap (T > n) = \emptyset$$

Donc

$$\begin{aligned} P(T=n) &= P(T > n-1) - P(T > n) \\ &= (q^N)^{n-1} - (q^N)^n \\ &= q^{N(n-1)} (1 - q^N) \end{aligned}$$

b) $T \sim \text{Gé}(1 - q^N)$

$$p \in]0, 1[$$

$$\lambda > 0$$

$$Y \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad (Y \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} \quad P(Y=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!})$$

$$X(\omega) = 1$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (X|Y=m) \sim \mathcal{B}(m, p)$$

$$\text{donc } \forall k \in \mathbb{N} \quad P(X=n|Y=m) = \begin{cases} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} & \text{si } m \geq n \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

Formule des probas totales avec $(Y=m)_{m \in \mathbb{N}}$

$$P(X=n) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(X=n, Y=m)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} P(Y=m) P(X=n|Y=m)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{p^n}{n!} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(1-p)^{m-n}}{(m-n)!} \lambda^m$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^n \lambda^n}{n!} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(1-p)^{m-n} \lambda^{m-n}}{(m-n)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^n \lambda^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2(1-p))^{m-n}}{m!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^n \lambda^n}{n!} e^{2(1-p)}$$

$$= e^{-2\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!}$$

Donc : $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$