

SOMMAIRE

Exercice 1 (TD)

- ↳ Intégrales
- ↳ DL

Exercice 2 (TD)

- ↳ Intégrales
- ↳ DL

Exercice 3 (TD)

- ↳ Intégrale
- ↳ DL

Exercice 6 (TD)

- ↳ Intégrales
- ↳ DL

→ Hyper important

Exercice 1 (1) (2) (3) (4) (7) (9) (12)

1) $f: t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$, $I =]0; +\infty[$

f est continue sur $]0; +\infty[$

En 0: $f(t) \sim \frac{1}{t^{1/2}}$. Or, $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0 (Riemann $1/2 < 1$ en 0). Par théorème de comparaison, f est intégrable en 0.

En $+\infty$: Par th de comparaison à un 0 puis un équivalent; f est intégrable en $+\infty$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\ln(t(1+\frac{1}{t}))}{t^{3/2}} = \frac{\ln(t) + \ln(1+\frac{1}{t})}{t^{3/2}} \\ &= \frac{\ln(t) + \frac{1}{t} + o(\frac{1}{t})}{t^{3/2}} = \frac{\ln(t) + o(\ln(t))}{t^{3/2}} \\ &\sim_{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{3/2}} \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(t)}{t^{3/2}} = o(\frac{1}{t^{5/4}})$ donc, par Riemann, $t \mapsto \frac{1}{t^{5/4}}$ est intégrable

5) $f: t \mapsto \arctan(\sum(\frac{1}{t^2}))$ est cpm sur $[1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \arctan(\sum(\frac{1}{t^2})) &= \arctan(\frac{1}{t^2} + o(\frac{1}{t^2})) \\ &= \frac{1}{t^2} + o(\frac{1}{t^2}) \\ &\sim_{+\infty} \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

$t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann en $+\infty$). Donc, par th de comparaison, f est intégrable sur $[1; +\infty[$

2) $f: t \mapsto \ln(t) e^{-t}$, $I =]0; +\infty[$

f est continue par morceaux sur I

$f(t) \sim \ln(t)$
 $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur 0
 Par th de comparaison, f est intégrable en 0

$f(t) = \frac{0}{+\infty} (e^{-2t})$ (croissance $\ln/\exp$)
 $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en $+\infty$
 Par th de comparaison, f est intégrable en $+\infty$

f est intégrable sur I

3) $f: t \mapsto \frac{\sin^3(t)}{t^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0; +\infty[$

En 0+: $\sin^3(t) = (t + o(t))^3 = t^3(1 + o(1))^3$
 $\xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^2} = t \rightarrow 0$

Donc $f(t) = \frac{t + o(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

f est prolongeable par continuité en 0 donc f est intégrable en 0

En $+\infty$: $-1 \leq \sin(t) \leq 1$
 donc $-1 \leq \sin^3(t) \leq 1$
 donc $-\frac{1}{t^2} \leq \frac{\sin^3(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

Par encadrement, $f(t) = \frac{\sin^3(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ (ou borne $\times$ limite nulle pour aller plus vite)

Donc, $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$. Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann)

Donc, par majoration, f est intégrable en $+\infty$. Ainsi f est intégrable sur I

4) $f: t \mapsto \frac{\arctan(t^2+1)}{t^2+1}$, $I = [1; +\infty[$

f est cpm sur I , $f \geq 0$.

Soit $x \in [1; +\infty[$, $\forall t \in [1, x]$,
 $\frac{\arctan(t^2+1)}{t^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{t^2+1}$

$$\int_1^x \frac{1}{t^2+1} = [\arctan(t)]_1^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$$

Donc, par domination de fcts +, $\int_1^{+\infty} f$ cvg donc $\int_1^{+\infty} |f|$ cvg

$f(t) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{t^2}$ donc (Riemann $+\infty$),
 $t \mapsto \frac{\pi}{2} \frac{1}{t^2}$ est inté en $+\infty$ donc par th de comp, f est inté en $+\infty$

7) $f: t \mapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est cpm sur $I =]0; 1[$
 $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-t}$. Aussi f inté en 1
 $\Leftrightarrow t \mapsto \frac{1}{1-t}$ inté en 1

On pose $c = \frac{1}{2}$. Soit ε , $c < \varepsilon < 1$, alors:

$$\begin{aligned} \int_c^\varepsilon \frac{1}{1-t} dt &= [\ln(1-t)]_c^\varepsilon \\ &= \ln(1-\varepsilon) - \ln(1-c) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 1} -\infty \text{ donc } f \text{ pas inté en } 1 \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 1} 1 \text{ donc pas inté sur } I \end{aligned}$$

12) $f: x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ est cpm sur $]1; +\infty[$

En 1: $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{x-1}}$ donc f est inté en 1
 car $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ est inté en 1

Soit $c \in]1; +\infty[$ et $1 < \varepsilon \leq c$

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^c \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx &= \int_\varepsilon^c (x-1)^{-1/2} dx \\ &= [2(x-1)^{1/2}]_\varepsilon^c \\ &= 2\sqrt{c-1} - 2\sqrt{\varepsilon-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 1} 2\sqrt{c-1} \end{aligned}$$

En $+\infty$: $f(x) \approx \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Par intégrale de Riemann, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable donc f intégrable en $+\infty$. Donc, f est intégrable sur $]1; +\infty[$

9) $f: t \mapsto \ln(t) \ln(1-t)$ est continue sur $]0; 1[$

On remarque que, $\forall t \in]0; 1[$, $f(t) = f(1-t)$

En 0: Soit $x \in]0; 1[$

$$\ln(t) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t \ln(t) \text{ et } -t \ln(t)$$

$$= o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Or, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ cvg par Riemann en 0
 donc, par th de comp $\int_0^{1/2} -t \ln(t) dt$
 cvg abs donc cvg
 puis $\int_0^{1/2} \ln(t) \ln(1-t) dt$ aussi

(2^{ème} sol): Soit $x \in [\frac{1}{2}; 1[$:

$$\begin{aligned} \text{En 1: } \int_{1/2}^x \ln(t) \ln(1-t) dt &= \int_{1/2}^{1-x} -\ln(u) \ln(1-u) du \\ &= \int_{1-x}^{1/2} \ln(u) \ln(1-u) du \xrightarrow{x \rightarrow 1} \int_0^{1/2} \ln(t) \ln(1-t) dt \\ &\text{donc } \int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt \text{ cvg} \end{aligned}$$

En 0: (avec le faux problème):

On reprend $\ln(t) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$
 donc $\ln(t) \ln(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$
 donc $\int_0^{1/2} \ln(t) \ln(1-t) dt$ cvg par th de faux problème de limite en 0

Exercice 2 (1) (4) (3)

1) $f: t \mapsto t\left(\frac{1}{t} - \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est cpm sur $I =]0; +\infty[$

En 0: $1 - t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$ (borné $\times$ lim nulle)
 donc f prolongeable par continuité en 0^+ donc inté en 0^+

$$\begin{aligned} \text{En } +\infty: f(t) &= t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{6t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{6t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6t^2} \end{aligned}$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{6t^2}$ est inté en $+\infty$
 donc, par th de comp, f est inté en $+\infty$. Donc f inté sur I

4) $f: t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))}{t}$ est cpm sur $]0; 1[$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(\sin(t))}{t} &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln(t + o(t))}{t} = \frac{\ln(t)}{t} + \frac{\ln(1 + o(1))}{t} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln(t)}{t} \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} o\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)$. Or $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ divg
 donc, par th de comp, $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t} dt$ divg
 Donc, $\int_0^1 \frac{\ln(\sin(t))}{t} dt$ divg

3) $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est cpm sur $]0; +\infty[$
 $t \mapsto 1/t^t$

En 0 : $\frac{1}{0^0} = 1$

$\hookrightarrow$ Soit $t \in]0; 1]$, $f(t) = \frac{1}{t^t} = e^{-t \ln(t)}$
 $\rightarrow 1$ (par cc et compo) donc f est
 $t \rightarrow 0$ prolongeable par continuité
 en 0 donc intégrable en 0

En $+\infty$: $\frac{1}{t^t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 0$ ($\frac{1}{t^2}$) ?

$\hookrightarrow \frac{t^2}{t^t} = \frac{1}{t^{t-2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par composition
 $O_x, t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est uné en $+\infty$ donc f
 également

Exercice 3 (1) (2) (6)

1) $f: t \mapsto \frac{1}{t} \sin(\ln(1 + \frac{1}{t}))$ est $\mathcal{C}^0$ sur
 $]0; +\infty[$

En $+\infty$: $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{t} \sin(\frac{1}{t} + o(\frac{1}{t}))$
 $= \frac{1}{t} (\frac{1}{t} + o(\frac{1}{t}))$

$= \frac{1}{t^2} + o(\frac{1}{t^2}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} > 0$
 $O_x, t \mapsto t^{-2}$ est uné en $+\infty$ (Riemann)
 Donc, par comparaison, f est uné en $+\infty$

En 0 : Soit $A > 0$, $u:]A; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ est
 bijective, str mono et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$
 Donc, par changement de
 variable u :

$$\int_A^1 |f| = \int_{1/A}^1 |t \sin(\ln(1+t))| \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= - \int_{1/A}^1 \frac{1}{t} \sin(\ln(1+t)) dt$$

$$= \int_1^{1/A} \left| \frac{1}{t} \sin(\ln(1+t)) \right| dt$$

$O_x, \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t+1}$ donc $\frac{1}{t} \sin(\ln(1+t))$
 $\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t+1} \sin(\ln(1+t))$

O_x , pour $C > 1$, $\frac{d}{dt} \ln(1+t) = \frac{1}{1+t}$

$O_x, \frac{d}{dt} (-\cos(\ln(1+t))) = \frac{\sin(\ln(1+t))}{1+t}$

Donc, $\int_1^C \frac{\sin(\ln(1+t))}{1+t} dt = [-\cos(\ln(1+t))]_1^C$
 $= \cos(\ln(2)) - \cos(\ln(1+C))$

$\hookrightarrow (u_n = \exp(2n\pi) - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie que,
 $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(\ln(1+u_n)) = 0$
 $(v_n = \exp(2n\pi + \pi) - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie que
 $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(\ln(1+v_n)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(voir suite sur feuille suivante)

2) $f: t \mapsto e^{\sin(t)}$ est cpm sur $[1; +\infty[$
 et positive

$\forall t \in I, 0 \leq e^{-1} \leq e^{\sin(t)}$

Soit $x > 1$, $\int_1^x e^{-1} dt = \frac{x}{e} - \frac{1}{e} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Donc $\int_1^{+\infty} e^{-1} dt$ div, par domination
 de fonctions positives. Donc $\int_1^{+\infty} e^{\sin(t)} dt$ div

6) $f: t \mapsto (t+1)^{1/t+1} - 1 - \frac{\ln(t)}{t}$ est cpm
 sur $[1; +\infty[$

$\hookrightarrow$ Notons $g: t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$. Donc, pour
 tout $t \geq 1$, on a : $f(t) = e^{g(t+1)} - 1 - g(t)$

$\hookrightarrow \forall t \geq 0, 0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{\ln(t)}{t}$

$$\exp\left(\frac{\ln(1+t)}{1+t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{\ln(t+1)}{(t+1)} + \frac{\ln(t+1)^2}{(t+1)^2}\right)$$

$$+ o\left(\frac{\ln(t+1)^2}{(t+1)^2}\right)$$

donc $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(t+1)}{t+1} - \frac{\ln(t)}{t} + \frac{\ln(t+1)^2}{(t+1)^2}$
 $+ o\left(\frac{\ln(t+1)^2}{(t+1)^2}\right)$

$\hookrightarrow h(t) = \frac{t \ln(t+1) - (t+1) \ln(t)}{t(t+1)}$
 $= \frac{t \ln(t) + 1 + o(1) - (t+1) \ln(t)}{t(t+1)}$
 $\underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1 - \ln(t) + o(1)}{t(t+1)} \sim -\frac{\ln(t)}{t^2}$

Ces deux suites tendent vers $+\infty$
 mais $(\cos(\ln(1+u_n)))$ et
 $(\cos(\ln(1+v_n)))$ n'ont pas la même
 limite. Donc, $t \mapsto \cos(\ln(1+t))$ div. en $+\infty$

Donc, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(\ln(1+t))}{1+t} \right| dt$ div.

Donc, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(\ln(1+t))}{t} \right| dt$ div.

Donc f pas intégrable en 0.

Mq (1) $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ univ. en $+\infty$
 (2) $t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{t^2}$ univ. en $+\infty$

Comme $\frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{\ln^2(t)}{t^2}\right)$, (2) suffit

$\hookrightarrow$ $\frac{\ln^2(t)}{t^2} \xrightarrow{+\infty} 0$ donc $\frac{\ln^2(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$
 (Riemann) donc i. aussi donc h. de même
 d'où par linéarité f également

Exercice 6 ! Dans beaucoup de concours

1) $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$

$\rightarrow$ Rq: $f: t \mapsto \ln(\sin(t))$ cpm sur $]0; \frac{\pi}{2}]$

• $\ln(\sin(t)) = \ln(t + o(t^2))$
 $= \ln(t) + \ln(1 + o(t))$
 $\sim_{0^+} \ln(t) \rightarrow$ intégrable en 0^+

Par th de comparaison, $t \mapsto \ln(\sin(t))$ intégrable en 0^+

i.e. $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ cvg

dc: $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ cvg ($\int_Y^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ a une lim $< \infty$ qd $Y \rightarrow 0^+$)

• $y: t \mapsto \ln(\cos(t))$ est cpm sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\int_0^x \ln(\cos(t)) dt$
 $\stackrel{u = \frac{\pi}{2} - t}{=} \int_{\pi/2 - x}^0 \ln(\cos(\frac{\pi}{2} - u)) du$ d'après l'existence de I, J existe
 $\stackrel{\substack{\rightarrow \sin(u) \\ \rightarrow 0}}{\rightarrow} 0$

2) Et même, $I = J = \frac{\pi}{2}$

$\hookrightarrow I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))}{(\ln(1/2) + \ln(\sin(2t)))} dt$
 $= -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt}_{\text{finie}}$

(c'est pas une fraction, c'est une égalité, le haut eq au bas)