

exercice 1:

1) $f: t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ Aurélien

• en 0: $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$

or, $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0 (critère de Riemann en 0, $\frac{1}{2} < 1$)

par théorème de comparaison à un équivalent, f est intégrable en 0

• en $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} = \frac{\ln\left(t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)}{t^{3/2}} \\ &= \frac{\ln(t) + \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{t^{3/2}} \\ &= \frac{\ln(t) + \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{3/2}} \\ &= \frac{\ln(t) + o(\ln(t))}{t^{3/2}} \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{3/2}} \end{aligned}$$

or, $\frac{t^{5/4} \ln(t)}{t^{3/2}} = \frac{\ln(t)}{t^{1/4}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

Donc $\frac{\ln(t)}{t^{3/2}} = o\left(\frac{1}{t^{5/4}}\right)$; or, par critère de Riemann en $+\infty$, $t \mapsto \frac{1}{t^{5/4}}$ est intégrable en $+\infty$ ($\frac{5}{4} > 1$)

Donc par théorème de comparaison, à un 0 et à un équivalent, f est intégrable en $+\infty$.

4) $f: t \mapsto \frac{\arctan(t^2+1)}{t^2+1}$, $I = [1, +\infty[$

Martin B.

• f est continue par morceaux sur I
 $f \geq 0$

• Soit $x \in [1, +\infty[$

$$\forall t \in [1, x], \quad 0 \leq \frac{\arctan(1+t^2)}{1+t^2} \leq \frac{\pi}{2} \wedge \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_1^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$$

Donc par théorème de domination pour les fonctions positives,

$$\int_1^{+\infty} |f| \text{ converge}$$

----- autre solution :

$$\bullet f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{1}{t^2}$$

D'après le critère de Riemann en $+\infty$, $t \mapsto \frac{\pi}{2} \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$

Donc par théorème de comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

9) $f: t \mapsto \ln(t) \ln(1-t)$, $I =]0, 1[$

Thomas

• f est continue sur $]0, 1[$

• on remarque : pour tout $t \in]0, 1[$, $f(t) = f(1-t)$

• en 0 : soit $t \in]0, 1[$

$$\ln(t) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t \ln(t)$$

$$\text{et } -t \ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Or, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge par critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$)

donc, par théorème de comparaison, ~~$\int_0^{1/2} -t \ln(t) dt$~~ converge absolument donc converge

$$\int_0^{1/2} -t \ln(t) dt$$

puis $\int_0^{1/2} \ln(t) \ln(1-t) dt$ aussi

• en 1 : soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$

$$\int_{1/2}^x \ln(t) \ln(1-t) dt = \int_{1/2}^{1-x} -\ln(u) \ln(1-u) du$$

$$= \int_{1-x}^{1/2} \ln(u) \ln(1-u) du \xrightarrow{x \rightarrow 1} \int_0^{1/2} \ln(t) \ln(1-t) dt$$

Donc $\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$ converge

---- autre solution en 0:

faux problème en 0:

$$\ln(t) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad (\text{croissances comparées})$$

$$\text{Donc } \ln(t) \ln(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Donc $\int_0^{1/2} \ln(t) \ln(1-t) dt$ converge par théorème du faux problème de limite en 0.

exercice 2:

$$1) f: t \mapsto t \left(\frac{1}{t} - \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad I =]0, +\infty[$$

soit

• f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{• en } 0: \quad & \underbrace{1 - t \sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \\ & \quad \quad \quad (\text{borne } \times \text{ limite nulle}) \end{aligned}$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0.

$$\begin{aligned} \text{• en } +\infty: \quad f(t) & \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{6t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) \\ & = \frac{1}{6t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ & \sim \frac{1}{6t^2} \end{aligned}$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{6t^2}$ est intégrable en $+\infty$

Par théorème de comparaison, f est intégrable en $+\infty$

Donc f est intégrable sur I .

3) $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

Mathias

• en 0: $\frac{1}{t^2} \rightarrow +\infty$

Soit $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \frac{1}{t^2} = \exp(-2 \ln(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées et composition

Donc f est prolongable par continuité en 0 donc intégrable en 0.

• en $+\infty$: $\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^{1+2}}$

$= \exp(-(1+2) \ln(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par composition

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ par critère de Riemann en $+\infty$

Donc f conv.

exercice 3:

2) $f: t \mapsto e^{\sin(t)}$, $I = [1, +\infty[$

Raphaël

f est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$, positive

$\forall t \in I$, $0 \leq e^{-1} \leq e^{\sin(t)}$

Soit $\alpha \geq 1$,

$$\int_1^\alpha e^{-1} dt = \frac{\alpha}{e} - \frac{1}{e} \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc $\int_1^{+\infty} e^{-1} dt$ diverge et par domination par les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{\sin(t)} dt$ diverge

c) $f: t \mapsto (t+1)^{\frac{1}{t+1}} - 1 - \frac{\ln(t)}{t}$, $I = [1, +\infty[$

Louison

f est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$

• Soit $g: t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$

Pour tout $t > 1$, on a $f(t) = e^{g(t+1)}$

analyse: $\underbrace{(t+1)^{\frac{1}{t+1}} - 1}_{?} - \frac{\ln(t)}{t}$ diverge car pour tout $t \geq e$, $\frac{\ln(t)}{t} \geq \frac{1}{t} \geq 0$

On tente un développement asymptotique

$$\exp\left(\frac{\ln(1+t)}{1+t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\ln(1+t)}{1+t} + \frac{\ln(1+t)^2}{(1+t)^2} + o\left(\frac{\ln(1+t)^2}{(1+t)^2}\right)$$

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{1+t} - \frac{\ln(t)}{t}}_{h(t)} + \underbrace{\frac{\ln(t+1)^2}{(1+t)^2} + o\left(\frac{\ln(1+t)^2}{(1+t)^2}\right)}_{O\left(\frac{\ln(t+1)^2}{(t+1)^2}\right) = O\left(\frac{\ln(t)^2}{t^2}\right)}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{t \ln(1+t) - (t+1) \ln(t)}{t(t+1)} \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{t \ln(t) + 1 + o(1) - (t+1) \ln(t)}{t(t+1)} \\ &= \frac{1 - \ln(t) + o(1)}{t(t+1)} \\ &\sim -\frac{\ln(t)}{t^2} \end{aligned}$$

Montrons que: (1) $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$

(2) $t \mapsto \frac{\ln(t)^2}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$

Comme $h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{\ln(t)^2}{t^2}\right)$, (2) suffit

$$t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)^2}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\ln(t)^2}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Or, $t \mapsto t^{\frac{3}{2}}$ est intégrable en $+\infty$ (critère de Riemann, $\frac{3}{2} > 1$)

Donc $t \mapsto \frac{\ln(t)^2}{t^2}$ aussi, de même, h . Par linéarité, f est intégrable en $+\infty$.

ex 6 : $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$; $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$

~~Montrons que~~ $f: t \mapsto \ln(\sin(t))$ est continue par morceaux sur $]0, \pi/2]$

Montrons que f est intégrable en 0^+ :

$$\begin{aligned} \ln(\sin(t)) &= \ln(t + O(t^2)) \\ &= \ln(t) + \underbrace{\ln(1 + O(t))}_{O(\ln(t))} \end{aligned}$$

$$\underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(t)$$

$t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0^+

Par théorème de comparaison, $t \mapsto \ln(\sin(t))$ est intégrable en 0^+ .

ie : $\int_0^{\pi/2} |\ln(\sin(t))| dt$ converge

Donc $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ converge

• $g: t \mapsto \ln(\cos(t))$ est continue par morceaux sur $[0, \pi/2[$

Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^x \ln(\cos(t)) dt &= \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(\frac{\pi}{2}-u)) du & u = \frac{\pi}{2} - t \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du. \end{aligned}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} 0$

D'après l'existence de I , J existe et même $I = J$.

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(\sin(2t)) dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2u)) du$ converge, on peut faire des changements de variable