

TD - Integration sur un intervalle quelconque

Ex 6

$$I = \int_0^{\pi/2} h(\sin(t)) dt \quad \text{CV}$$

changement de var
 $\varphi: t \mapsto \frac{\pi}{2} - t = u$

$$J = \int_0^{\pi/2} h(\cos(t)) dt \quad \text{CV}$$

et $I = J$

$$I + J = 2I = \int_0^{\pi/2} h(\cos(t)) \sin(t) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} h\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[h\left(\frac{1}{2}\right) + h(\sin(2t)) \right] dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/2} h\left(\frac{1}{2}\right) dt}_{\text{converge car}} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} h(\sin(2t)) dt}_{\text{converge car}}$$

et converge car

$$\frac{N}{2} h\left(\frac{1}{2}\right) = -h(2) \times \frac{N}{2}$$

converge car

$$= 2I - \int_0^{\pi/2} h\left(\frac{1}{2}\right) dt$$

qui CV

$$(u=2t) = \frac{-h(2) \frac{N}{2}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^N h(\sin(u)) du$$

car: $\int_0^{\pi} h(\sin(u)) du = I + \int_{\pi/2}^{\pi} h(\sin(u)) du$

$$\left(t = u - \frac{\pi}{2}\right) = I + \int_0^{\pi/2} h\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt$$

$$= I + \int_0^{\pi/2} h(\cos(t)) dt$$

$$= 2I$$

Donc

$$2I = -h(2) \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \times 2I$$

Ex 1

Q8) $f: t \mapsto \frac{\sqrt{\sin(t^2)}}{t^{3/2}}$ est cpm sur $]0, 1[$

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}} \sqrt{t^2} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0^+

Par théorème de comparaison, f est intégrable en 0^+

Q11) $f: t \mapsto \frac{1}{t^2} e^{-1/t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ cpm sur $]0, 1[$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{O.C.}) \\ \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty \end{array} \right.$$

Par composition de limites $\frac{1}{t^2} e^{-1/t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{car } \sin \text{ est bornée}$$

Donc f est prolongeable en 0 et donc $\int_0^1 |f(t)| dt < +\infty$

Q12) $f: t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t-1}}$ est cpm sur $]1, +\infty[$
 ≥ 0

En $+\infty$

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

$$t^2 f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{3/2} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $\underbrace{f(t)}_{\geq 0} = o\left(\underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\geq 0}\right)$; $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable
en $+\infty$ Par Riemann

Donc par théorème de comparaison (positif) ; f est intégrable
en $+\infty$

En 1^+

$f(t) \underset{t \rightarrow 1^+}{=} o\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{t-1}}}_{\geq 0}\right)$; $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ est intégrable en 1^+

par Riemann

Donc par théorème de comparaison (positif)
 f est intégrable en 1^+

Q(3)

$f: t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}$ est cpm sur $\underline{0}$; $+\infty$ Σ

En 0^+

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t^2}{t} = t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0^+ ; elle
est donc intégrable en 0^+

En $+\infty$

Soit $t \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(t)}{t} &= \frac{1}{t} \left[\frac{1 - \cos(2t)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \end{aligned}$$

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} dt$ DVG

- De plus, par intégration par parties, on montre que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ CV

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$ DVG

Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ CV

- $u: t \mapsto \frac{1}{t}$

- $v: t \mapsto \frac{1}{2} \sin(2t)$

soit $e^+ \text{ sur } [1, +\infty[$

- $u(t) v'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \rightarrow +\infty \end{smallmatrix} \left(-\frac{1}{t} \right) \right)$

Le théorème d'IBPP s'applique

$I = \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\cos(2t)}{t}}_{u(t)v'(t)} dt$ et $J = \int_1^{+\infty} \underbrace{-\frac{\sin(2t)}{2t^2}}_{\begin{smallmatrix} 0 \\ t \rightarrow +\infty \end{smallmatrix} \left(-\frac{1}{t^2} \right)} dt$ ont m^{ême} nature.

$t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en 1^+ . Par théorème de comparaison

J est ACV donc CV

Il en est de m^{ême} pour I

Ex 2

Q4) $f: t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))}{t}$ cpm sur $\underline{]0, 1[}$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(\sin(t))}{t} &\stackrel{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{\ln(t + o(t))}{t} = o(\ln(t)) \\ &\stackrel{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{\ln(t) + \frac{\ln(1 + o(1))}{t}}{t} \\ &\sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t)}{t} \end{aligned}$$

Par thm de compensation sur f est intégrable en 0^+

$\Leftrightarrow t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est intégrable en 0^+

$$\text{or } \frac{1}{t} \stackrel{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)$$

Si $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est intégrable en 0^+ alors $t \mapsto \frac{1}{t}$ est intégrable en 0^+ ce qui n'est pas.

Q1) $f: t \mapsto t \left(\frac{1}{t} - \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right)$ est cpm sur $\underline{]0, +\infty[}$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(t) &\stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{6t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) \\ &\sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{6t^2} \end{aligned}$$

D'après Riemann, f est intégrable en $+\infty$

Ex 0⁺ : Soit $t \in]0, +\infty[$

$$f(t) = 1 - t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \quad (\text{bornée \& lim nulle})$$

Donc par prolongement par continuité ; f est intégrable en 0^+

Ex 3

Q3) $f: t \mapsto \exp\left(\frac{1}{\sqrt{1-h(t)}}\right)$ sur $]0, 1[$

En 0^+

$$-h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{-h(t)}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

$$\exp\left(\frac{1}{\sqrt{-h(t)}}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$$

Donc, par prolongement par continuité en 0^+ ;
 f est intégrable en 0^+

En 1^-

Soit

$$\gamma: \left] \gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), +\infty \right[\rightarrow \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$$

$$t \mapsto \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

bijection ; strictement croissante et $\in \mathcal{C}^1$

$$\int_{1/2}^1 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}(1-t)}\right) dt$$

$$\int_{\varphi^{-1}(\frac{1}{2})}^{+\infty} \exp \varphi^{-1}(\varphi(u)) \varphi'(u) du = B$$

ont même valeur

$$B = \int_{\varphi^{-1}(\frac{1}{2})}^{+\infty} \frac{e^{u - \frac{1}{2u}}}{2u^3} du$$