

TD – Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1 ★☆☆ — Étudier l'intégrabilité de chacune des fonctions suivantes, sur l'intervalle I indiqué.

$$(1) \quad f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}, \quad I =]0, +\infty[$$

$$(2) \quad f : t \mapsto \ln(t) e^{-t}, \quad I =]0, +\infty[$$

$$(3) \quad f : t \mapsto \frac{\sin^3(t)}{t^2}, \quad I =]0, +\infty[$$

$$(4) \quad f : t \mapsto \frac{\arctan(t^2+1)}{t^2+1}, \quad I = [1, +\infty[$$

$$(5) \quad f : t \mapsto \arctan\left(\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right), \quad I = [1, +\infty[$$

$$(6) \quad f : u \mapsto \frac{\ln(u)}{u^2+1}, \quad I =]0, +\infty[$$

$$(7) \quad f : t \mapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}, \quad I =]0, 1[$$

$$(8) \quad f : t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}} \sqrt{\sin(t^2)}, \quad I =]0, 1]$$

$$(9) \quad f : t \mapsto \ln(t) \ln(1-t), \quad I =]0, 1[$$

$$(10) \quad f : t \mapsto e^{-1/t^2}, \quad I =]0, 1]$$

$$(11) \quad f : t \mapsto \frac{1}{t^2} e^{-1/t} \sin\left(\frac{1}{t}\right), \quad I =]0, 1]$$

$$(12) \quad f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}, \quad I =]1, +\infty[$$

$$(13) \quad f : t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}, \quad I =]0, +\infty[$$

integrabiliteNiveau1 [indication(s)]

Exercice 2 ★★☆☆ — Étudier l'intégrabilité de chacune des fonctions suivantes, sur l'intervalle I indiqué.

$$(1) \quad f : t \mapsto t \left(\frac{1}{t} - \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad I =]0, +\infty[$$

$$(2) \quad f : t \mapsto t e^{-\sqrt{t}}, \quad I = [1, +\infty[$$

$$(3) \quad f : x \mapsto \frac{1}{x^x}, \quad I =]0, +\infty[$$

$$(4) \quad f : t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))}{t}, \quad I =]0, 1]$$

$$(5) \quad f : t \mapsto e^{1/\sqrt{t}}, \quad I =]0, 1]$$

$$(6) \quad f : t \mapsto e^{-t \arctan(t)}, \quad I = [0, +\infty[$$

integrabiliteNiveau2 [indication(s)]

Exercice 3 ★★★ — Étudier l'intégrabilité de chacune des fonctions suivantes, sur l'intervalle I indiqué.

$$(1) \quad f : t \mapsto \frac{1}{t} \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right), \quad I =]0, +\infty[$$

$$(2) \quad f : t \mapsto e^{\sin(t)}, \quad I = [1, +\infty[$$

$$(3) \quad f : t \mapsto e^{1/\sqrt{-\ln(t)}}, \quad I =]0, 1[$$

$$(4) \quad f : t \mapsto \frac{\sqrt{-\ln(t)}}{t^{3/2}}, \quad I =]0, 1]$$

$$(5) \quad f : t \mapsto e^{-t \sin(t)}, \quad I = [0, +\infty[$$

$$(6) \quad f : t \mapsto (t+1)^{\frac{1}{t+1}} - 1 - \frac{\ln(t)}{t}, \quad I = [1, +\infty[$$

integrabiliteNiveau3 [indication(s)]

Exercice 4 ★☆☆ — Étudier la nature de chacune des intégrales suivantes.

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\ln(t)} dt$$

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{2/3}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$(3) \quad \int_0^1 \frac{(e^{-2x} - e^{-x}) \sin(x)}{(1 - \cos(x)) \sqrt{\tan(x)}} dx$$

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

natureIntegrale

Exercice 5 ★★☆☆ — Démontrer la convergence et calculer la valeur de chacune des intégrales suivantes.

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$$

$$(2) \int_0^{\pi/2} \sin(t) \ln(\sin(t)) dt$$

$$(3) \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t(1+t)} dt$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{1/3}-1}{t(1+t)^{2/3}} dt$$

$$(6) \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t-t^2}} dt$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} dt$$

$$(8) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan(x^2) dx$$

$$(9) \int_0^{+\infty} \cos(x) e^{-x} dx$$

$$(10) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(11) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$(12) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$$

$$(13) \int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx$$

$$(14) \int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x} dx$$

$$(15) \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{ch}^2(t)} dt$$

convergenceValeurIntegrale [indication(s)]

Exercice 6 ★☆☆ — On considère les deux intégrales. Justifier la convergence des intégrales :

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt \quad \text{et} \quad J := \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt.$$

1. Démontrer que les intégrales I et J convergent.
2. En déduire les valeurs de $I+J$ et $I-J$, puis celles de I et J .

integraleCompositionSinusParLnAvecCombinaison

Exercice 7 ★★★ — Soit la fonction :

$$f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, puis calculer sa valeur.

queueIntegraleSinusCardinal [indication(s)]

Exercice 8 ★☆☆ — Étudier l'intégrabilité de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l}]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt \end{array} \right.$$

sur l'intervalle $]0, 1]$.

integrabiliteQueueIntegrale

Exercice 9 ★★☆☆ — Soient α, β, λ des réels. Étudier la nature de chacune des intégrales suivantes.

$$(1) \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x^\beta} dx$$

$$(2) \int_0^{+\infty} x^\alpha (e^{\beta x} - 1) dx$$

$$(3) \int_0^1 \frac{t^\alpha}{1-t^\beta} dt$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx$$

$$(5) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta} dx$$

$$(6) \int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha (-\ln(x))^\beta} dx$$

$$(7) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (1-t)^\beta} dt$$

$$(8) \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta} dt$$

$$(9) \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} dt$$

$$(10) \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) \frac{e^{-\alpha x}}{x} dx$$

natureIntegraleAvecParametre

Exercice 10 ★☆☆ — Soit $a > 0$. Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$ converge et calculer sa valeur. On pourra commencer par considérer le cas où $a = 1$.

convergenceValeurIntegraleAvecParametre

Exercice 11 ★★☆☆ — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 - 4b < 0$. Établir l'existence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + at + b} dt$$

et calculer sa valeur. On pourra s'aider de la symétrie axiale de la courbe représentative de l'intégrande.

integraleInversePolynomeDegreDeux

Exercice 12 ★★☆☆ — Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $a > 0$. On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt$ converge. Démontrer que pour tout $x > a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.

abscisseConvergenceTransformeeLaplace

Exercice 13 ★★☆☆ — Notons $I := \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$.

1. Justifier l'existence de I .

2. Démontrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$.

3. Démontrer que $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

4. Donner la valeur de I .

differenceDeuxExponentiellesFoisInverse

Exercice 14 ★★☆☆ — Soit un entier $n \geq 2$.

1. Déterminer les racines du polynôme $X^{n-1} + \dots + X + 1$.

2. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$.

integraleCompositionSinusParLnAvecPolynomes

Exercice 15 ★★☆☆ — Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient intégrables. Démontrer que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

fonctionEtDeriveeSecondeIntegrables [indication(s)]

Exercice 16 ★★☆☆ — Étudier la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} t \cos(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t \cos^2(t) dt .$$

Plus généralement, étudier la convergence d'une intégrale de la forme $\int_0^{+\infty} t P(\cos(t)) dt$, où P est un polynôme à coefficients réels.

identiteFoisPolynomeEnCosinus

Exercice 17 ★★☆☆ — Soient $a > 0$, $b > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites réelles définies par $u_0 := a > 0$, $v_0 := b > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} := \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $M(a, b)$.

2. Justifier l'existence de $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2} \sqrt{b^2 + t^2}} dt$.

3. Démontrer que $I(a, b) = \frac{1}{a} I\left(1, \frac{b}{a}\right)$.

4. Démontrer que l'application :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{2} \left(t - \frac{ab}{t} \right) \end{array} \right.$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ dont l'application réciproque est également de classe $\mathcal{C}^1$.

5. Effectuer un changement de variable à l'aide de l'application φ , pour relier $I(a, b)$ et $I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.

6. Relier enfin $I(a, b)$ et $M(a, b)$.

moyenneArithmeticoGeometrique

Exercice 18 ★★☆☆ — Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour chaque entier n , on note :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, I_n et J_n sont bien définis.

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n .

3. Soit $\phi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que :

$$\int_0^{\pi/2} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad [\text{lemme de Riemann-Lebesgue}].$$

4. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. En déduire que $J_n - I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$.

7. En déduire que $I = \frac{\pi}{2}$.

integraleDirichlet

Exercice 19 ★★☆☆ — Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]0, \sqrt{n}]$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

$$\text{où, pour tout } p \in \mathbb{N}, W_p := \int_0^{\pi/2} \sin^p(t) dt.$$

3. Déterminer une récurrence entre W_{n+2} et W_n ($n \in \mathbf{N}$), établir que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ est constante et en déduire que :

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. En déduire que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

integraleGauss

Exercice 20 ★★★ — Soient a un réel et f une application continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $[a, +\infty[$.

- Démontrer que si f admet une limite en $+\infty$, cette limite est nécessairement nulle.
- Démontrer que si f est uniformément continue, alors elle tend vers 0 en $+\infty$.
- Le résultat de la question 2 subsiste-t-il si on suppose simplement f continue ?

fonctionUniformementContinueIntegrale [corrigé]

Exercice 21 ★★★ — Soit $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}([0, +\infty[, \mathbf{R})$ une fonction intégrable. Démontrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels convergeant vers $+\infty$ telle que :

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad x_n f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

fonctionIntegraleVersusFonctionInverse

Exercice 22 ★★★ — Pour tout $a \in \mathbf{C}$, on note $I(a) = \int_0^{2\pi} \ln(|e^{it} - a|) dt$.

- Démontrer l'existence de $I(0)$ et donner sa valeur.
- Démontrer l'existence de $\int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt$ et en déduire l'existence de $I(1)$.
- Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{C}$, $I(a)$ existe et que $I(a) = I(|a|)$.
- Soit un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul. Démontrer que le nombre :

$$M(P) = \int_0^{2\pi} \ln(|P(e^{it})|) dt \quad [\text{mesure de Mahler de } P].$$

est bien défini.

- Démontrer que, pour tout $b > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $M(X^n - b^n) = n M(X - b)$.
- Déterminer la valeur de $M(X - b)$, pour tout $b \in]0, 1[$, puis, pour tout $b > 1$.
- Calculer $M(X - 1)$.
- Soit $a \in \mathbf{C}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ et $P = a \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$. Démontrer que $M(P) = |a| \prod_{k=1}^n \max\{1, |\alpha_k|\}$.

mesureMahlerPolynome

Exercice 23 ★★★ — Soit $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}([0, +\infty[, \mathbf{R})$ une fonction positive, décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$. Démontrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

fonctionIntegralePositiveDecroissante

Exercice 24 ★★★ — Soient $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbf{R})$ une fonction positive et décroissante. Posons :

$$g \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \sin(x) \end{array} \right.$$

Démontrer que f est intégrable si et seulement si g est intégrable.

fonctionPositiveDecroissanteFoisSinus