

Ex 5 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{1+t} dt$.

Limite de (u_n) ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\downarrow$ chgt de variable avec $\phi: t \mapsto \frac{t}{n}$

$$u_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{1+t} dt = n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{1+\frac{t}{n}} dt < \frac{1}{n} \int_0^{\frac{1}{n}} 1 dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n f(t)}{n+t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) \left(1 - \frac{t}{n+t}\right) dt \quad I_n$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt + \underbrace{\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t f(t)}{n+t} dt}_{\substack{I_n \\ f_n(t) \geq 0}}$$

$$I_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t f(t)}{n+t} dt$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$
- Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- $\phi: t \mapsto f(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$
et $\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, |f_n(t)| \leq \phi(t)$

Donc par théorème de convergence dominée,

Donc par encadrement $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t f_n(t)}{n+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Finalement $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt$.