

Q est absolument $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} (x)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_1^{\infty} x^{-x} dx$.

exercice 23

Soit $a > 0, b > 0, x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$$

$$f: \mathbb{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$

$f: t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)$ est cpm sur $]0, +\infty[$

$$\text{En } 0 \quad \frac{e^{-at} - 1 - at + o(t)}{t} \frac{e^{-bt} - 1 - bt + o(t)}{t} \cos(xt) = \frac{t(b-a) + o(t)}{t} \frac{\cos(xt)}{1} \\ \xrightarrow{t \rightarrow 0} b-a + o(1)$$

$$= b-a + o(1)$$

$$\sim |b-a| > 0$$

Q $\int_0^1 |b-a| dx$ par thm sur les équivalents, $\int_0^1 |f| dx$ est intégrable en 0

$$\text{En } +\infty \quad |f(t)| \leq \left| \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \right| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)_{t \rightarrow +\infty}$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann)

Par thm de comparaison, $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable en $+\infty$

Par thm de domination, f est intégrable en $+\infty$

2) (H1) Soit $t \in]0, +\infty[$, fixe. $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car cos 1 est

(H2) Soit $x \in \mathbb{R}$, fixe. $t \mapsto f(x, t)$ est cpm sur $]0, +\infty[$.

$$\text{Soit } t \in]0, +\infty[\quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt)$$

et $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$ est cpm sur $]0, +\infty[$

(H3) Soit $x \in \mathbb{R}$, fixe. D'après Q1, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

(H4) Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$
 $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq |e^{-bt} - e^{-at}| \leq e^{-bt} + e^{-at} \leq \varphi(t)$ (indépendant de $x \in \mathbb{R}$)

Or $t \mapsto e^{-bt}$ et $t \mapsto e^{-at}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$ car $a > 0$ et $b > 0$. Par linéarité, φ est intégrable sur $]0, +\infty[$

Le critère $\mathcal{E}'$ s'applique et l'on a

(1) F est bien définie et est $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{R}$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \min(xt) dt$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $A > 1$

$$\int_0^A e^{t(ix-b)} dt = \left[\frac{1}{ix-b} e^{t(ix-b)} \right]_0^A = \frac{1}{ix-b} e^{A(ix-b)} - \frac{1}{ix-b} e^{0} \\ = \frac{ix+b}{b^2+x^2} (e^{-Ab} (\cos(Ax) + i \sin(Ax))) - e^{-b} (\cos(x) + i \sin(x))$$

$$\int_0^A e^{-bt} \min(xt) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^A e^{t(ix-b)} dt \right) \\ = \frac{-xe^{-Ab} \cos(Ax)}{b^2+x^2} - \frac{be^{-Ab} \sin(Ax)}{b^2+x^2} + \frac{xe^{-b} \cos(x)}{b^2+x^2} + \frac{be^{-b} \sin(x)}{b^2+x^2}$$

$$0 \leq \frac{-xe^{-Ab} \cos(Ax)}{b^2+x^2} \leq \frac{|xe^{-Ab}|}{b^2+x^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

Par thm d'enveloppement, $\frac{-xe^{-Ab} \cos(Ax)}{b^2+x^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

De même, $\frac{-be^{-Ab} \sin(Ax)}{b^2+x^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

Donc $\int_0^A e^{-bt} \min(xt) dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-bt} \min(xt) dt = \frac{xe^{-b} \cos(x)}{b^2+x^2} + \frac{be^{-b} \sin(x)}{b^2+x^2}$

Soit $0 < \varepsilon < 1$

$$\int_\varepsilon^A e^{t(ix-b)} dt = \left[\frac{1}{ix-b} e^{t(ix-b)} \right]_\varepsilon^A = \frac{1}{ix-b} e^{A(ix-b)} - \frac{1}{ix-b} e^{\varepsilon(ix-b)}$$

$$= \frac{ix+b}{x^2+b^2} (e^{-b}(\cos x + i \sin x)) = e^{-b}(\cos(x) + i \sin(x))$$

$$\int_0^x e^{-bt} \sin(xt) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^x e^{t(ix-b)} dt \right) \\ = \frac{-xe^{-b} \cos x}{x^2+b^2} + \frac{-be^{-b} \sin x}{x^2+b^2} - \frac{xe^{-b} \cos(0)}{x^2+b^2} + \frac{be^{-b} \sin(0)}{x^2+b^2}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2+b^2} \quad \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\text{Donc } \int_0^x e^{-bt} \sin(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^x e^{-bt} \sin(xt) dt = -\frac{xe^{-b} \cos x}{x^2+b^2} - \frac{be^{-b} \sin x}{x^2+b^2} + \frac{x}{x^2+b^2}$$

$$\text{Par linéarité } \int_0^x e^{-bt} \sin(xt) dt = \underbrace{\int_0^x e^{-bt} \sin(xt) dt}_{\text{cur}} + \underbrace{\int_0^x e^{-bt} \sin(xt) dt}_{\text{cur}} \\ = \frac{x}{x^2+b^2}$$

$$\text{De même, } \int_0^x e^{-at} \sin(xt) dt = \frac{x}{x^2+a^2}$$

$$\text{Donc } F'(x) = x \left(\frac{1}{x^2+b^2} - \frac{1}{x^2+a^2} \right) \quad (\text{linéarité})$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F \text{ et } \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2} \right) \text{ ont même dérivée sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2} \right) + C \quad (*)$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \varphi'(t) = (-ae^{-at} + be^{-bt})t - (e^{-at} - e^{-bt}) \\ = \frac{be^{-bt} - ae^{-at}}{t^2} - \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t^2}$$

$$F(x) = \int_0^x \varphi(t) \cos(xt) dt$$

$u: t \mapsto \varphi(t)$ et $v: t \mapsto \cos(xt)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$u(t)v(t) = \frac{be^{-bt} - ae^{-at}}{t^2} \cos(xt) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{1} \cdot \frac{x}{1} = x \quad \text{et} \quad \frac{1}{t^2} \cos(xt) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{t^2} \cos(xt) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ (cc)} \text{ car } u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ (bornée \times lim nulle)}$$

Par thm d'IPP, comme $\int_0^{+\infty} u v' \text{ cc}$, $\int_0^{+\infty} u' v \text{ cc}$ et

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} u v' = \left[\frac{\varphi(t) \sin(xt)}{x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(t) \sin(xt)}{x} dt \\ &= -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \sin(xt) dt \end{aligned}$$

$$5) \frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \rightsquigarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right) \rightarrow 0$$

$$\left| \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \sin(xt) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| |\sin(xt)| dt \leq \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt$$

On $t \mapsto \varphi'(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{En } 0 \quad |\varphi'(t)| &= \left| \frac{b(1-bt + o(t)) - a(1-at + o(t))}{t} \cdot \frac{1-(bt+o(t))}{t^2} \right| \\ &= \left| \frac{b-a + (b^2-a^2)t + o(t)}{t} \cdot \frac{b-a + o(1)}{t} \right| \\ &= |b^2 - a^2 + o(1)| \\ &\sim |b^2 - a^2| \end{aligned}$$

On $\int_0^1 |b^2 - a^2| \text{ cc}$. Par thm sur les équivalents, $\int_0^1 |\varphi'| \text{ cc}$
 $\rightarrow \varphi'$ est intégrable en 0

$$\text{En } +\infty \quad |\varphi'(t)| = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ car } \frac{t(b e^{-bt} - a e^{-at})}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ (cc)}$$

On $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (L'Hospital)

Par thm de domination, φ' est intégrable en $+\infty$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt = \Gamma < +\infty \text{ (cc)}$$

$$\text{or } 0 \leq |F(x)| \leq \frac{\Gamma}{|x|} \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$$

Par thm d'enroulement, $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

Par passage à la lim de (x_n) , $0 = c$

Exercice 26 P ne possède aucune racine complexe car $P(ze^{i\theta}) \neq 0$
 or $\forall r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\text{Posons } f: \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ (r, \theta) \mapsto \frac{1}{P(ze^{i\theta})}$$

1) (H1) $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ fixé, $r \mapsto f(r, \theta)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ car P est $\mathcal{C}^1$

(H2) $\forall r \in \mathbb{R}^+$, fixé, $\theta \mapsto f(r, \theta)$ est cpm sur $[0, 2\pi]$
 et $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ $\frac{\partial}{\partial r} f(r, \theta) = \frac{-e^{i\theta} P'(ze^{i\theta})}{P(ze^{i\theta})^2}$

et $\theta \mapsto \frac{\partial}{\partial \theta} f(r, \theta)$ est cpm sur $[0, 2\pi]$

(H3) $\forall r \in \mathbb{R}^+$
 $\theta \mapsto \frac{1}{P(ze^{i\theta})}$ est cpm sur $[0, 2\pi]$ et intégrable sur $[0, 2\pi]$

(H4) $\forall r \in [a, b] \subset \mathbb{R}^+$, $(r, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$
 $\left| \frac{\partial}{\partial r} f(r, \theta) \right| = \frac{|P'(ze^{i\theta})|}{|P(ze^{i\theta})|^2}$

Comme $[a, b] \times [0, 2\pi]$ est compact.
 sur $[a, b] \times [0, 2\pi]$, $(r, \theta) \mapsto \frac{|P'(ze^{i\theta})|}{|P(ze^{i\theta})|^2}$ est $\mathcal{C}^0$ comme quotient

de f^0 $\mathcal{C}^0$ (polynômes). Par thm des bornes atteintes,
 $\exists M \in \mathbb{R}^+$, $\left| \frac{\partial}{\partial r} f(r, \theta) \right| \leq M$ indépendant de $r \in [a, b]$

Le critère $\mathcal{C}$ s'applique et l'on a

(1) f est bien défini et est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

(2) $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \mapsto \frac{\partial}{\partial \theta} f(r, \theta)$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$