

Exercice n° 3 : On souhaite appliquer le thm de CV dominée

R₁) $\forall m \in \mathbb{N}$, f_m est cpm sur $]0, +\infty[$

R₂) Soit $x > 0$ fixé

$$f_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad (f_m \sim \frac{1}{m(1+x^2)})$$

et $\tilde{0}$ est cpm sur $]0, +\infty[$

R₃) Soit $(m, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[$

$$|f_m(x)| = \frac{e_n(1 + \frac{x^2}{m})}{x(1+x^2)}$$

$$\text{On } \forall t \geq 0 \quad e_n(1+t) \leq t$$

car e_n est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc toute ses tangentes sont au-dessus de sa courbe

Donc en particulier en prenant la tangente en 0

$$\forall t \geq 0 \quad e_n(1+t) \leq 1(t-0) + e_n(1) = t.$$

Ainsi

$$|f_m(x)| \leq \frac{1}{\frac{m(1+x^2)}{\geq 1}} \leq \frac{1}{(1+x^2)} = \phi(x)$$

$x \mapsto \phi(x)$ est cpm sur $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

ϕ est prolongeable par continuité en 0^+ donc

ϕ est int en 0^+

En $+\infty$:

$$\phi(t) \sim \frac{1}{t^2} \quad \text{Or } t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ est int en } +\infty \text{ par Riemann}$$

Par thm de comparaison ϕ est int en $+\infty$.

Le thm de CV dominée s'applique et on a

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, f_m est intégrable sur $]0, +\infty[$.

$\tilde{0}$ est int sur $]0, +\infty[$