

$$\begin{aligned}
 \text{ds } \int_0^{+\infty} |f_n(b)| db &= \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-b} db \\
 &= |a_n| \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-b} db}_{=1} \\
 &= |a_n|
 \end{aligned}$$

b. H1.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  cpm et int sur  $[0, +\infty[$  (Q. 2. a)

H2.  $\sum f_n$  CS sur  $[0, +\infty[$  (Q. 1. b)

H3.  $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$  conv (Q. 2. a)

D'après le th d'intégration terme à terme de Lebesgue (cas gën),

C1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  int sur  $[0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \text{C2. } \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(b) \right) db &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(b) db \quad (\text{Q. 1. a}) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|
 \end{aligned}$$

Ex 17. 1.  $g: ]-1, +\infty[ \times ]0, 1[ \xrightarrow{(x, t)} \mathbb{R}$   
 $\xrightarrow{(x, t)} \frac{t-1}{\ln t} t^x = \frac{t-1}{\ln t} e^{x \ln t}$

Soit  $x \in ]-1, +\infty[$   
 $g(x, \cdot)$  cpm sur  $]0, 1[$

• en  $0^+$ :  $|g(x, t)| = \frac{|t-1|}{|\ln t|} t^x$

$$\sim \frac{1}{|\ln t|} t^x = o(t^x) \quad \text{car } |\ln t| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

$$\text{or, } t \mapsto t^x \text{ int en } 0 \iff x > -1$$

donc  $g(x, \cdot)$  int en 0

• en  $1^-$ :  $t = 1+h$ ,  $h \rightarrow 0^+$

$$|g(x, t)| = \left| \frac{h}{\ln(1+h)} (1+h)^x \right| \sim \frac{1}{\ln(1+h)} (1+h)^x \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 1$$

Donc par prolongement par  $C^0$ ,  $g(x, \cdot)$  int en 1  
 $(g(x, 1) = 1)$

Ainsi,  $f$  est bien déf sur  $J-1, +\infty[$ .

Applications à critère  $\mathcal{E}^1$ :

H1.  $A \in J_0, 1[$  fixé,  $g(\cdot, b) \in \mathcal{E}^1$  sur  $J-1, +\infty[$   
 $\frac{\partial g}{\partial x}(x, b) = (b-1) e^x$

H2.  $A x \in J-1, +\infty[$  fixé,  
 $b \mapsto g(x, b)$  est  $b \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, b)$  cpm sur  $J_0, 1[$

H3.  $A x \in J-1, +\infty[$  fixé,  $g(x, \cdot)$  int sur  $J_0, 1[$

H4. Loc. Soit  $[a, +\infty[ \subset J-1, +\infty[$   
 Soit  $(x, b) \in [a, +\infty[ \times J_0, 1[$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, b) \right| = |b-1| e^x \\ = (1-b) e^x$$

$$\text{Or, } \begin{matrix} a \leq x & ; & b \leq 1 & \text{car } b \in J_0, 1[ \\ a \ln b \geq x \ln b & ; & \ln b < 0 & \text{car } b < 1 \\ e^a \geq e^x & ; & \ln b < 0 & \end{matrix}$$

$$\text{d'où } \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, b) \right| \leq (1-b) e^a = \varphi(b)$$

$$\text{donc } \varphi: J_0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{cpm et int sur } J_0, 1[ \quad (\text{borné}) \\ b \mapsto (1-b) e^a$$

Par critère  $\mathcal{E}^1$  par bs  $J$  à paramètre,

C1.  $\forall x \in J-1, +\infty[, b \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, b)$  int sur  $J_0, 1[$

C2.  $f$  bien déf et  $\mathcal{E}^1$  sur  $J-1, +\infty[$

C3. Soit  $x \in J-1, +\infty[$   
 $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_{\varepsilon}^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x, b) db \\ &= \int_{\varepsilon}^1 (e^{x+1} - e^x) db \\ &= \left[ \frac{e^{x+2}}{x+2} - \frac{e^{x+1}}{x+1} \right]_{\varepsilon}^1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{\varepsilon}{x+2} + \frac{\varepsilon}{x+1}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

2. Soit  $x \in ]-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+1} dt + C \\ &= \left[ \ln|t+2| - \ln|t+1| \right]_0^x + C \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C \\ &= \int_0^1 \underbrace{\frac{t-1}{\ln t}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} e^{x \ln t} dt \quad (0 < t < 1) \end{aligned}$$

On veut appliquer le th de conv dom version  $C^0$

H1. Pour  $t \in ]-1, +\infty[$ ,  $g(x, \cdot)$  cpm sur  $]0, 1[$

H2. Soit  $t \in ]0, 1[$ ,  $\neq \ln t$   
 $g(x, t) = \frac{t-1}{\ln t} e^{x \ln t}$   
 $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (x \ln t < 0)$

H3. Soit  $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times ]0, 1[$ ,  
 $|g(x, t)| = \frac{|t-1|}{|\ln t|} t^x = \frac{1-t}{|\ln t|} t^x$   
 $= \frac{1-t}{|\ln t|} t^x$

or,  $x \geq 0$  donc  $x \ln t \leq 0 \quad (x \ln t < 0)$   
 d'où  $t^x \leq 1$  (exp  $\uparrow$ )

d'où  $|g(x, t)| \leq \frac{1-t}{|\ln t|} = \Phi(t)$

en  $0^+$ :  $\frac{1-t}{|\ln t|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

donc  $\Phi$  int en 0 par prolongement par  $C^0$

en 1: Comme  $\Phi(1) = 1$ ,  $\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1$

$$\text{D'où } \varphi: \begin{cases} ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1-t}{|1-t|} \end{cases}$$

cpm, intés sur  $]0, 1[$

Le th de conv dom v. l'° s'applique :

$$\int_0^1 g(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \int_0^1 0 dt$$

$$\text{d'où } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{donc } C = 0$$

$$\text{et } f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$