

$$\int_{\mathbb{I}} \sum_{n=0}^{+\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{I}}$$

Ex 14

$$\int_0^1 e^{-x \ln(x)} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$$

exp est développable en série entière avec pour rayon de convergence $+\infty$

$$\int_0^1 e^{-x \ln(x)} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln(x))^n dx$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\forall x \in]0, 1[\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln(x))^n \geq 0$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $]0, 1[$

intégrable en 0

si $n=0$ OK

si $n \geq 1$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n!} (x \ln(x))^n \underset{x \rightarrow 0^+}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Donc comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable en 0 par Riemann

alors f_n est intégrable en 0^+

• On sait que

$$\forall x \in]0, 1[\quad e^{-x \ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln(x))^n$$

Autrement dit $\sum f_n$ CS sur $]0, 1[$ vers une fonction CP sur $]0, 1[$

Donc comme $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est positive
 Par théorème d'intégration termes à termes de
 Lebesgue
 on a l'identité suivante dans $[0, +\infty]$

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln(x))^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln(x)^n dx$$

• Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

Soit $\varepsilon \in]0, 1]$

$$I = \int_{\varepsilon}^1 x^p \ln(x)^q dx$$

$$\left| \begin{array}{l} x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1} \quad x \mapsto \ln(x)^q \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]\varepsilon; 1] \end{array} \right.$$

Donc par théorème d'intégration par parties

$$I = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \ln(x)^q \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \times \frac{1}{x} q \ln(x)^{q-1} dx$$

$$= - \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1} \ln(\varepsilon)^q - \frac{q}{p+1} \int_{\varepsilon}^1 x^p \ln(x)^{q-1} dx$$

Donc en posant $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln(x)^q dx$$

et en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ par croissance comparée
 ($\ln$ vs x^p) on a:

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$

On montre par récurrence

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad P(q): \ll I_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^q} I_{p,0} \gg$$

$$\text{or } \forall p \in \mathbb{N} \quad I_{p,0} = \frac{1}{p+1}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Donc

$$\int_0^1 e^{-x \ln(x)} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 (x)^n \cdot \ln(x)^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^{-(n+1)}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^{-n} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}}$$