

Exercice 1:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ On pose } \pi : \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})^2 &\rightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ou directement :} \\ \pi : \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) \\ (A, B) \mapsto A^T B \\ \text{bilinéaire} \end{array} \right.$$

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}, \quad M^T(t) M(t) = I \quad \xrightarrow{\pi_2(M, M)(t)}$$

Comme π est bilinéaire, $\pi(M, M)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M'(t)^T M(t) + M(t)^T M'(t) = 0 \quad (\pi_2(M, M)'(t))$$

$$\text{donc, } \forall t \in \mathbb{R}, \quad M'(t)^T M(t) = -M(t)^T M'(t)$$

$$\text{donc, } \forall t \in \mathbb{R}, \quad M'(t)^T = -M(t)^T M'(t) M(t)^T$$

$$\begin{aligned} \text{donc, } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \det(M'(t)^T) &= \det(-M(t)^T M'(t) M(t)^T) \\ &= (-1)^{2n+1} \det(M(t)^T) \det(M'(t)) \det(M(t)^T) \\ &= -\det(M'(t)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(M'(t)) = 0$$

Exercice 4:

• Soit F un sev de E de dimension finie

Ainsi, F est un fermé

$$\text{Soit } N \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\underbrace{a + k \frac{b-a}{N}}_{\substack{\in [a, b] \\ \in F}}\right)}_{\in F} \xrightarrow{+ \infty} \underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{\in F \text{ (car } F \text{ fermé)}}$$

2^e solution:

$B = (b_1, \dots, b_p, b_{p+1}, \dots, b_n)$ adaptée à F de dim $p \leq n$

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{\substack{i=1 \\ \in F}}^p \left(\int_a^b b_i^* \circ f(t) dt \right) b_i + \sum_{i=p+1}^n \underbrace{\left(\int_a^b e_i^* \circ f(t) dt \right) e_i}_{\in F}$$

$\in F$ $\in OE$

Exercice 6:

- Remarque : $\sum_{k=1}^N O\left(\frac{k}{n^2}\right) \neq \sum_{k=1}^N k O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 - $\eta :]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $\eta : x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'_d(0)$, continue, $\eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (1)
 $\forall x \in]0,1[, x \neq 0 \quad f(x) = f(0) + x f'_d(0) + x \eta(x)$
 - $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f'_d(0) + \frac{k}{n^2} \eta\left(\frac{k}{n^2}\right)$
 En sommant pour k allant de 1 à n :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f'_d(0) + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \eta\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)}{2n} f'_d(0) + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \eta\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad (*)$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\frac{2n}{2n}} f'_d(0)$$
 - Soit $\varepsilon > 0$, de (1), $\exists \delta > 0, \forall x \in]0, \delta[, |\eta(x)| \leq \varepsilon$ (**)
 $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \frac{1}{n} \leq \delta$
 Soit un tel δ , soit un tel N , soit $n \geq N, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,
 $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \delta$, d'où, d'après (**), $|\eta\left(\frac{k}{n^2}\right)| \leq \varepsilon$
 - $|*| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \eta\left(\frac{k}{n^2}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} |\eta\left(\frac{k}{n^2}\right)|$

$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \varepsilon$$

$$\leq \frac{(n+1)}{2n} \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon$$
- d'où $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \eta\left(\frac{k}{n^2}\right) \right| \leq \varepsilon$ et
 donc $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} f'_d(0)$

Exercice 3

- Soit $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $D_n : x \mapsto \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 0 \\ x^{3/2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^{n/n!} & \ddots & \ddots & x \end{pmatrix} \odot$
 Posons, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_i(x)$ la i^e
 colonne de $D_n(x)$
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, C_i est dérivable car composantes
 polynomiales donc C^∞ , det étant multilinéaire

• $\varphi_n: x \mapsto \det(C_1(x), \dots, C_n(x))$ est dérivable

$$\text{Et, } \varphi_n'(x) = \det(C_1'(x), \dots, C_n(x)) + \det(C_1(x), \dots, C_n'(x)) + \dots + \det(C_1(x), \dots, C_n'(x))$$

$$\text{Donc, } \varphi_n'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & x^{n-1} & \dots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \end{vmatrix} \\ + \dots + \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & \frac{x^n}{n!} & \dots & \frac{x^n}{n!} \end{vmatrix}$$

On remarque que, $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, x \in \mathbb{R}, C_i'(x) = C_{i+1}'(x)$

$$\text{Donc } \varphi_n'(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & \frac{x^n}{n!} & \dots & \frac{x^n}{n!} \end{vmatrix}$$

$$\text{En développant sur la première colonne: } \varphi_n'(x) = (-1)^{2n} \varphi_{n-1}(x) = \varphi_{n-1}(x)$$

• Par théorème fondamental, φ_n étant $\mathcal{C}^1$, $\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \int_0^x \varphi_{n-1}'(t) dt$

$$\text{Or, } \varphi_n(0) = 0 \text{ car } C_1(0) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

$$\text{Donc } \varphi_n(x) = \int_0^x \varphi_{n-1}'(t) dt$$

• Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, H(n): \varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!}$

$$\text{I) } \varphi_1(x) = \det(x) = x \text{ donc } H(1)$$

H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $H(n)$

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n'(t) dt$$

$$\text{Par hyp, } 0 = \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Donc } H(n+1)$$

$$\text{Donc, par réc, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \det(D_n(x)) = \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 9:

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S(n) = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

$$\sigma(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{+\infty} \int_0^1 x \sin(x) dx = \sin(1) - \cos(1)$$

En sachant que, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ (*),

D'après (*), en sommant pour k allant de 1 à n

$$\sigma(n) - \frac{1}{6n^2} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3} \sin\left(\frac{k}{n}\right)}_{\xrightarrow{+\infty} \int_0^1 x^3 \sin(x) dx} \leq S(n) \leq \sigma(n)$$

$\xrightarrow{+\infty} 0$ (th. bornée $\times$ nulle)

d'où, par encadrement, $S(n) \xrightarrow{+\infty} \sin(1) - \cos(1)$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $K \in [1, n]$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{K+n}} - \frac{1}{6(K+n)^{3/2}}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{K+n}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{K+n}}$$

On remarque que $\frac{1}{\sqrt{K+n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{K+n}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{K+n}}\right) \geq 0$

$$\text{Donc, } \left(\frac{1}{\sqrt{K+n}} - \frac{1}{6(K+n)^{3/2}}\right)^2 \leq \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{K+n}}\right) \leq \frac{1}{K+n}$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n \frac{1}{K+n} - \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{1}{3(K+n)^2}}_{(**)} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{36(K+n)^3}}_{(***)} \leq v_n \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{K+n}}_{(*)}$$

$$(*) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{+ \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2) \quad (\text{Riemann})$$

$\hookrightarrow$ (par φ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$)

$$(**) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} \xrightarrow{+ \infty} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx \quad (\text{car } x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2} \text{ est } \varphi \text{ sur } [0, 1])$$

$$(***) \rightarrow 0$$

Par th. d'encadrement, $v_n \xrightarrow{+\infty} \ln(2)$

Exercice 10:

- Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$ non identiquement nulle tq $\| \int_a^b f(t) dt \| = \int_a^b \| f(t) \| dt$

On note $u = \frac{\int_a^b f(t) dt}{\| \int_a^b f(t) dt \|} \rightarrow \neq 0$
 $E = \text{Vect}(u) \quad \oplus \quad \text{Vect}(u)^\perp$

$$\forall t \in [a, b], \exists! (\alpha(t), v(t)) \in \mathbb{R} \times \text{Vect}(u)^\perp, f(t) = \alpha(t)u + v(t)$$

- 1) On note $B = (e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\text{Vect}(u)^\perp$, alors, $\forall t \in [a, b]$, $\alpha(t) = \langle f(t), u \rangle$, donc, comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire et $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto u$ sont continues, α est continue, puis, par diff, v est continue:

$$2) \quad \langle \int_a^b v(t) dt, u \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n-1} (\int_a^b e_k * \circ v(t) dt) e_k, u \rangle \rightarrow \text{Vect}(u)^\perp \\ + \langle (\int_a^b u * \circ v(t) dt) u, u \rangle \rightarrow = 0 \\ = 0$$

3) $\forall t \in [a, b], f(t) = \alpha(t)u + v(t)$

Par linéarité de $g \mapsto \langle u, g \rangle$,

$$\langle u, \int_a^b f(t) dt \rangle = \langle u, \int_a^b \alpha(t) dt u \rangle + \langle u, \int_a^b \beta(t) dt u \rangle$$

done

$$\langle u, \| \int_a^b f(t) dt \| u \rangle = \langle u, \int_a^b \alpha(t) dt \cdot u \rangle$$

ainsi, car $\langle u, (\| \int_a^b f \| \cdot \int_a^b \alpha) u \rangle = 0$, $\| \int_a^b f(t) dt \| = \int_a^b \alpha(t) dt$

- 4) Soit $t \in [a, b]$, on a $\alpha(t) \leq \|f(t)\|$

$$\langle f(t), u \rangle = \alpha(t)$$

Per Cauchy-Schwarz, $|\langle f(t), u \rangle| \leq \|f(t)\| \|u\| = \|f(t)\|$

d'où $\|x(t)\| \leq \|f(t)\|$