

CCINP
n° 74

Q1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\chi_A = (X+1)(X-1)(X-3)$ (det % 2^{ème} colonne)

$\text{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1, 3\}$

• On résout $AX = X$ d'inconnu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

on obtient $X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = E_1(A)$

• On résout $AX = -X$ et on obtient $X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = E_{-1}(A)$

• On résout $AX = 3X$ et on obtient $X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = E_3(A)$

On pose $e = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$P_{B_e \rightarrow e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$

Par théorème de changement de variable appliqué à

$$\begin{array}{ccc} \varphi_A & : & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ & & X \longmapsto AX \end{array}$$

$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=D} P^{-1}$

Q2) on résout :

$$(S) : X' = AX \text{ d'inconnue } X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(P^{-1}X)'} = D(P^{-1}X) \\ = Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y' = DY \\ Y = P^{-1}X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1}X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = a \\ b' = -b \\ c' = 3c \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1}X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k, p, m \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} a: t \mapsto ke^t \\ b: t \mapsto pe^{-t} \\ c: t \mapsto me^{3t} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1}X \end{cases}$$

$$\Rightarrow X \in \text{Vect} \left(t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ex 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, $D_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$D_n(x) = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^{3/2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ x^{n/2} & \dots & \dots & x^{1/2} & x \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= C_1(x)} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= C_n(x)}$

Les C_i sont dérivables.

Par théorème, D_n est dérivable.

$$D_n'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x \\ \frac{x^2}{2!} & \frac{x^2}{2!} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix} \quad (*) \quad \left. \vphantom{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x \\ \frac{x^2}{2!} & \frac{x^2}{2!} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix}} \right\} = 0$$

$$C_1'(x) = C_2(x)$$

$$+ \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & 1 & 1 \\ \vdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix} \quad (*) \quad \left. \vphantom{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & 1 & 1 \\ \vdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix}} \right\} = C_1$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!} & \dots & \dots & \frac{x^{n-1}}{n!} & 1 \end{vmatrix}$$

seul det non nul.

$$= D_{n-1}(x).$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad D_n(x) = D_{n-1}(x)$$

Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(n) : " \forall x \in \mathbb{R} \quad D_n(x) = \frac{x^n}{n!} "$$

Initialisation : $n=1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$D_1(x) = \det(x) = x = \frac{x^1}{1!}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons $P(n)$. Montrons que $P(n+1)$ est vrai :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$D'_{n+1}(x) = D_n(x) \stackrel{(H.A)}{=} \frac{x^n}{n!}$$

$$\underline{\text{Donc}} : D_{n+1}(x) = \int_0^x \underbrace{D'_{n+1}(t)}_{= \frac{t^n}{n!}} dt + \underbrace{D(0)}_{= 0} \quad \nabla t \in \mathbb{R}$$

3

$$D'_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Ex 2

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad g(f) = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linéaire
- f dérivable sur I
- I de dimension finie

On $\langle f, f \rangle$ est dérivable de dérivée

$$x \mapsto \langle f'(x), f(x) \rangle + \langle f(x), f'(x) \rangle$$

$$= 2 \langle f'(x), f(x) \rangle \quad (\text{Symétrie})$$

Or: $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et puisque f ne s'annule pas sur I ,

$\langle f, f \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$

(propriété de définition du produit scalaire)

Par composition, $g = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ est dérivable de

$$\text{dérivée} \quad g'(x) \mapsto 2 \langle f'(x), f(x) \rangle \times \frac{1}{2 \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}}$$

$$= \frac{\langle f'(x), f(x) \rangle}{\|f(x)\|}$$

Ex 7

$(E, \|\cdot\|)$ norm de dim $< +\infty$

$$f: [0, 1] \rightarrow E \quad E^2$$

$$f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0_E, \quad \|f(1)\| = 1$$

$$a \in [0, 1], \quad x \in [0, 1]$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^1}{1!} f''(t) dt$$

$$\underline{a \leftarrow 0:}$$

$$f(x) = \int_0^x (x-t) f''(t) dt.$$

$$\underline{x \leftarrow 1:}$$

$$f(1) = \int_0^{x=1} (1-t) f''(t) dt \quad (*)$$

$$\underline{a \leftarrow 1:}$$

$$f(x) = f(1) - \int_x^1 \frac{(1-t)^1}{1!} f''(t) dt$$

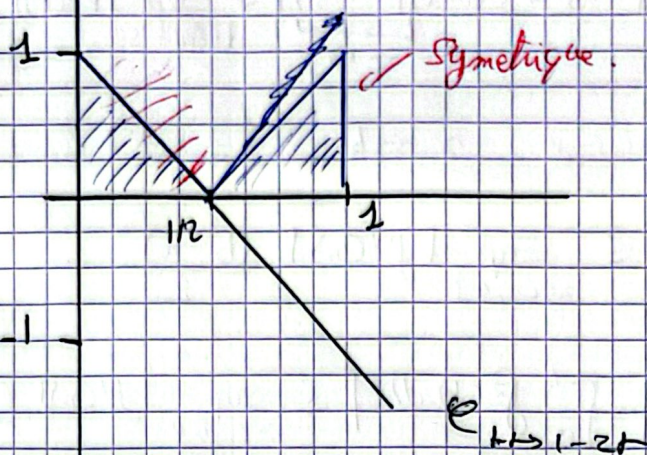
$$x \leftarrow 0$$

$$f(1) = - \int_0^1 1 f''(t) dt \quad (**)$$

$$(*) + (**): \quad 2f(1) = \int_0^1 (1-2t) f''(t) dt$$

$$2 = 2\|f(1)\| \leq \int_0^1 |1-2t| \|f''\|_{\infty} dt$$

$$\underline{\text{d'après:}} \quad 2 \leq \|f''\|_{\infty} \int_0^1 |1-2t| dt$$



Donc: $\int_0^1 |1-2t| dt = \frac{1}{2}.$

Donc: $\int_0^1 |1-2t| dt = \int_0^{1/2} (1-2t) dt + \int_{1/2}^1 (2t-1) dt$

Donc: $\|f\| \leq \|f'\|_{\infty} \int_0^1 |1-2t| dt$

Ex 5 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $f' \in C^1$, $f(a) = 0.$

Rq: $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|f'\|_{\infty}$

Par TFA; on pose $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

F est une primitive de f qui s'annule en $a.$

et $F \in C^1([a, b], \mathbb{R}).$

On a: $\forall t \in [a, b] \quad |f'(t)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$

Par Taylor - Lagrange ; $\forall x \in [a, b]$

$$|F(x) - F(a) - \underbrace{(x-a)F'(a)}_{=0}| \leq \sup_{t \in [a, b]} |F'(t)| \frac{(x-a)^2}{2}$$

En spécialisant : $x \leftarrow b$

$$|F(b)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2}$$

Donc : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2}$

Ex 9

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)}_{\approx \text{peu près } \frac{k}{n^2}} \stackrel{?}{=}$$

$$(*) \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \underbrace{\sin\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n}}_{f\left(\frac{k}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t \sin(t) dt$$

Car : $f: t \mapsto t \sin(t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, 1]$

Par théorème des sommes de Riemann ;
en posant $q_0 = 0 < \frac{1}{n} = q_1 < \dots < q_n = \frac{n}{n} = 1$

on obtient $(*)$.

De plus :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \sin(t) dt &= -\cos(1) + \int_0^1 \cos(t) dt \\ &= -\cos(1) + \sin(1) \end{aligned}$$

Comme ce matin :

$$\forall x \in [0, 1] \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

$$\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6}\right) \sin\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$