

Exercice 7:

1) Montrons que $\text{Ker}(\varphi)$ est dense ou fermé dans E

• $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan donc il existe $a \in E$ tel que $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}(a)$

1^{er} cas:

• $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé, gagné

2^{er} cas:

• $\text{Ker}(\varphi)$ pas fermé:

$\exists (a_n) \in \text{Ker}(\varphi)^{\mathbb{N}}$ et $x_0 \in E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ tq $a_n \rightarrow x_0$ tq $x = \lambda a + K$ ($\lambda \neq 0_K$)
Soit $x \in E$,

1^{er} cas: $x \in \text{Ker}(\varphi)$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = x$ ainsi $(b_n) \in \text{Ker}(\varphi)^{\mathbb{N}}$
et $b_n \rightarrow x$

2^{er} cas: $x \notin \text{Ker}(\varphi)$. Il existe $\mu \in K^*$ et $K_1 \in \text{Ker}(\varphi)$ tq $x = \mu a + K_1$
On pose: $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{\mu}{\lambda} (a_n - K_1)$
Ainsi $(b_n) \in \text{Ker}(\varphi)^{\mathbb{N}}$ et $b_n \rightarrow x$

Autre sol: Supposons $\text{Ker}(\varphi)$ non fermé dans E

$\exists (a_n) \in \text{Ker}(\varphi)^{\mathbb{N}}$, $x_0 \in E \setminus \text{Ker}(\varphi)$, $a_n \rightarrow x_0$, $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}(x_0)$

Soit $x \in E$, $\exists a \in \text{Ker}(\varphi)$, $\exists \lambda \in K$, $x = a + \lambda x_0$

Ainsi, $(a + \lambda a_n) \in \text{Ker}(\varphi)^{\mathbb{N}}$ tq $a + \lambda a_n \rightarrow a + \lambda x_0 = x$

2) Montrons que $\text{Ker}(\varphi)$ fermé si φ continue

$\Leftarrow$ $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ fermé donc $\text{Ker}(\varphi)$ également

$\Rightarrow$ ~~Supposons $\text{Ker}(\varphi)$ fermé~~ $\rightarrow$ plusieurs pistes:
~~Soit $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $a_n \rightarrow 0$~~ $\hookrightarrow$ par contraposée, de manière directe...

Par contraposée, supposons: $\forall c > 0$, $\exists x \in E$, $|\varphi(x)| > c \|x\|$ (*)
Montrons que $\text{Ker}(\varphi)$ n'est pas fermée

Soit $n \in \mathbb{N}$, on spécialise c à n
Il existe donc $x_n \in E$, $|\varphi(x_n)| > n \|x_n\|$
Donc $(x_n) \notin \text{Ker}(\varphi)^{\mathbb{N}}$

Potons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_0 - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi(x_n)} x_n \in \text{Ker}(\varphi)$

$$b_n = \frac{x_n}{\varphi(x_n)} \xrightarrow{+\infty} 0 \text{ (car } \|b_n\| \leq \frac{1}{n} \text{)}$$

Or, $y_n \rightarrow x_0 \notin \text{Ker}(\varphi)$ donc $\text{Ker}(\varphi)$ non fermé

3^{ème} sol de 1)

• Rappel: Si F sev, alors $\overline{F}$ sev contenant F
 $\overline{\text{Ker}(\varphi)}$ est un sev qui contient $\text{Ker}(\varphi)$ sev

1^{er} cas: Si $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé, c'est bon

2^{er} cas: Si $\text{Ker}(\varphi)$ non fermé, $\text{Ker}(\varphi) \neq \overline{\text{Ker}(\varphi)}$

Or, $\text{Ker}(\varphi) \subset \overline{\text{Ker}(\varphi)}$ et $\overline{\text{Ker}(\varphi)} \not\subset \text{Ker}(\varphi)$

Il existe $u \in E \setminus \text{Ker}(\varphi)$, $a \in \overline{\text{Ker}(\varphi)}$, $\text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}(a) = E$

Or $a \in \overline{\text{Ker}(\varphi)}$ et $\overline{\text{Ker}(\varphi)}$ sev. Par mun des Vect, $\text{Vect}(a) \subset \overline{\text{Ker}(\varphi)}$
et $\text{Ker}(\varphi) \subset \overline{\text{Ker}(\varphi)}$. Par mun de la somme:

$\text{Ker}(\varphi) + \text{Vect}(a) = E \subset \overline{\text{Ker}(\varphi)} \subset E$ Il en vient $\overline{\text{Ker}(\varphi)} = E$
d'où $\text{Ker}(\varphi)$ dense

Exercice 14

1) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|u(x)\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| \leq K \|x\|_1$$

$\hookrightarrow K$ indé de x

Soit $K \in \mathbb{I}, n\mathbb{I}$,

$$K = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{j \in \mathbb{I}, n\mathbb{I}} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \text{ donc } u \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ pour } \|\cdot\|_1,$$

$$\text{Or, } \|u\| = \sup \{ \|u(x)\|_1 \mid x \in \overline{B(0,1)} \}$$

$\forall x \in \overline{B(0,1)}, \|u(x)\|_1 \leq K \|x\|_1 \leq K$. Donc, par passage au sup, $\|u\| \leq K$

$$\text{Or, } \|u\| \geq \|u(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = K$$

$\hookrightarrow$ Kerne test

Donc $\|u\| = K$

2) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|u(x)\|_\infty = \max_{i \in \mathbb{I}, n\mathbb{I}} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$$

$$\text{Soit } i \in \mathbb{I}, n\mathbb{I}, \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty$$

$$\leq \max_{i \in \mathbb{I}, n\mathbb{I}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\|_\infty$$

Par passage au max $= C$, $\|u(x)\|_\infty \leq C \|x\|_\infty$ donc u est $\mathcal{C}^0$ pour $\|\cdot\|_\infty$

$$\text{Or, } \|u\| = \sup \{ \|u(x)\|_\infty \mid x \in \overline{B(0,1)} \}$$

$$\text{Or, } \forall x \in \overline{B(0,1)}, \|u(x)\|_\infty \leq C \|x\|_\infty \leq C$$

Donc, par passage au sup, $\|u\| \leq C$

$$\text{Faisons } i \in \mathbb{I}, n\mathbb{I}, C = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Posons $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$
 $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$. Soit $a = (\text{sgn}(a_{ij}))_{i \in \mathbb{I}, n\mathbb{I}} \in S_{\mathbb{R}^n(0,1)}$

$$\text{Ainsi, } \forall j \in \mathbb{I}, n\mathbb{I}, a_{ij} e_j^*(a) > 0$$

$$\text{Alors, } C = \|u\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j^*(a)$$

$$= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j^*(a) \right| \leq \|u(a)\|_\infty = \|u\| = C$$

Exercice 6 (TD)

1) Démontrons que $\|\cdot\|_\infty'$ est une norme

Homogénéité: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sup_{x \in [0,1]} |(\lambda P)(x)| &= \sup_{x \in [0,1]} |\lambda P(x)| \\ &= |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|\end{aligned}$$

IT: Soit $x \in [0,1]$, $|P+Q|(x) \leq |P(x)| + |Q(x)|$
 $\leq \|P\|_\infty' + \|Q\|_\infty'$
Par passage au sup, $\|P+Q\|_\infty' \leq \|P\|_\infty' + \|Q\|_\infty'$

Séparation: On suppose $\|P\|_\infty' = 0$

$\forall x \in [0,1], 0 \leq |P(x)| \leq \|P\|_\infty' = 0$
Par sép de l.1, $\forall x \in [0,1], P(x) = 0$
Donc $P = 0$ (∞ de racines)

Existence:

$\{ |P(x)| \mid x \in [0,1] \}$ est non vide, minorée par 0. $\tilde{P}$ est continue car le compact $[0,1]$, d'après th des bornes atteintes, $\|P\|_\infty'$ est bien définie

2) Supposons par l'absurde que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_\infty'$ sont équivalentes

$$\exists \alpha > 0, \forall P \in \mathbb{R}[X], \alpha \|P\|_\infty' \leq \|P\|_\infty \quad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{k=0}^n X^k, \|P_n\|_\infty = 1$$

la fonction $\tilde{P}_n \mid [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est $\nearrow$ sur $[0,1]$ donc $\|P_n\|_\infty' = n+1$
 $t \mapsto P_n(t)$

(1) nous donne: $(n+1) \leq \frac{1}{\alpha}$ ($\alpha > 0$) ce qui est absurde car $((n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Donc les normes ne sont pas équivalentes

$$\begin{aligned}3) \quad \|P\|_\infty &= \max | [P]_K | \\ \|P\|_\infty' &= \sup_{t \in [0,1]} |P(x)|\end{aligned}$$

Où dim $(K_n[X]) = n+1 < \infty$ donc toutes les normes sur cet espace sont éq ce qui est le cas pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_\infty'$

Exercice 10

Soient $y = (y_n), x = (x_n) \in$

On remarque que, $\forall n \in \mathbb{N}, |\bar{x}_n y_n| = |x_n| |y_n|$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que $(|x_n| - |y_n|)^2 \geq 0$ donc $|x_n|^2 + |y_n|^2 \geq 2|x_n||y_n|$

Où, $\sum (|x_n|^2 + |y_n|^2)$ converge par linéarité donc par théorème de comparaison de séries à termes généraux ~~positifs~~ ^{positifs}. $\sum |x_n| |y_n|$ converge.

Donc, par linéarité est comme $\sum 2 \bar{x}_n y_n$ est absolument convergente.

Alors, $\sum \bar{x}_n y_n$ converge.

2) Soient $(x_n), (y_n) \in \ell^2$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n + \lambda y_n|^2 \leq |x_n|^2 + \lambda |x_n| |y_n| + |y_n|^2 \lambda^2.$$

Où, $\sum (|x_n|^2 + \lambda |x_n| |y_n| + \lambda^2 |y_n|^2)$ converge donc par comparaison de séries à termes généraux positifs: $\sum |x_n + \lambda y_n|$ converge
(De plus, $\ell^2 \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\sum 0^2$ conv donc $(0)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$)

3) Positivité: Soit $(x_n) \in \ell^2$,

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2} \text{ donc } \|x\|_2 \geq 0$$

Séparation: Soit $x = (x_n) \in \ell^2$ tq $\|x\|_2 = 0$
Donc $\|x\|_2^2 = 0$
Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 = 0$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0$ (séparation de l. 1)

Homogénéité: Soit $x = (x_n) \in \ell^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \bar{\lambda} x_n \lambda x_n} = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^2 |x_n|^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2} = |\lambda| \|x\|_2 \end{aligned}$$

II: Soit $x \in \ell, y \in \ell, f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $t \mapsto \|x + ty\|_2^2$

$$\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| e^{i\theta} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } t \in \mathbb{R}, f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\bar{x}_n + t \bar{y}_n)(x_n + t y_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (|x_n|^2 + t \langle y, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t^2 |y_n|^2) \\ &= \|x\|_2^2 + t \langle x, y \rangle + t \langle y, x \rangle + t^2 \|y\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t e^{-i\theta}) &= \|x\|_2^2 + t e^{i\theta} \langle x, y \rangle + t e^{-i\theta} \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|_2^2 \\ &= \|x\|_2^2 + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|_2^2 \end{aligned}$$

donc $f(t e^{-i\theta})$ est positive et polynomiale de degré 2

$$\text{donc } 4|\langle x, y \rangle|^2 \leq 4\|x\|_2^2 \|y\|_2^2$$

$$\text{donc } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad (\text{par de } \sqrt{\cdot})$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|_2^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|_2^2 \\ &= \|x\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|_2^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|_2^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 \\ &\leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \end{aligned}$$