

DL: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$ (on suppose que ça existe)

$\hookrightarrow \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

$\hookrightarrow$ Comment on sait que c'est à cet ordre ?

$f(x) = \frac{\tan^2(x) - x^2}{\tan^2(x) x^2}$ ($\tan(x) \sim_0 x$) $\Rightarrow o(x^4)$ suffit

$\hookrightarrow \tan^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{o(x^5)}{o(x^4)} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{o(x^7)}{o(x^4)} + \frac{o(x^8)}{o(x^4)}$

$\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

Avec, $f(x) = \frac{x^2 + \frac{2}{3}x^4 - x^2 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Exercice 27:

Soient A, B deux parties non vides de E , on pose $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$

1) Soient K et L parties compactes, non vides et disjointes de E . Montrer que $d(K, L) > 0$ ($K \cap L = \emptyset \Rightarrow d(K, L) > 0$)

Supposons par l'absurde que $d(K, L) = 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, $d(K, L) + \frac{1}{n+1}$ ne minore pas D (car $\frac{1}{n+1} > 0$)
Donc, $\exists (k_n, l_n) \in (K \times L)^{\mathbb{N}}$ tq $0 \leq \|k_n - l_n\| \leq d(K, L) + \frac{1}{n+1}$
Donc, par th d'encadrement, $\|k_n - l_n\| \rightarrow 0$
Comme K compact: $\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow, \exists k \in K, k_{\varphi(n)} \xrightarrow{\|\cdot\|} k$ (compacité)

Donc, $0 \leq \|k - l_{\varphi(n)}\| \leq \underbrace{\|k - k_{\varphi(n)}\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|k_{\varphi(n)} - l_{\varphi(n)}\|}_{\rightarrow 0}$

Par encadrement, $l_{\varphi(n)} \xrightarrow{\|\cdot\|} k \in L$ (car L est fermée) (car compacte)

De plus, $k \in K$ (d'après hyp de compacité)

Aburde car $K \cap L = \emptyset$ (d'après hypothèse de base)

2) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto xy$

• $F = f^{-1}(\{1\}) \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow F = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$
• $G = f^{-1}(\{-1\}) \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow G = \{(x, -\frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$

• $\| \underbrace{(-\frac{1}{n}, n)}_{\in G} - \underbrace{(\frac{1}{n}, n)}_{\in F} \|_{\infty} \geq d(F, G) > 0$, avec $\frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ puis conclure.

INT:

Soit $\alpha > 1$:

♥ | $f: t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est continue sur $]0; +\infty[$ (faire attention en 0, $t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$ pas défini en 0). Mq $\int_0^{+\infty} \sin(t^\alpha) dt$ cvg

En $+\infty$: Posons $\varphi:]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ bijective et $\nearrow$. D'après le théorème de changement de variable, $t \mapsto t^{1/\alpha}$ de variable, $t \varphi'$ et

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \sin(t) t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^\alpha) dt$ sont de même nature. Étudions $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \sin(t) t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dt$

↳ 1^{re} méthode: Au niveau de la convergence: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \sin(t) t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dt \sim \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{1-1/\alpha}} dt$, se fait ensuite en élevant au carré

↳ 2^e méthode:

On étudie $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\beta} dt$ (avec $\beta = 1 - \frac{1}{\alpha}$ avec $0 < \beta < 1$)

♥ | $g: t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\beta}$ est cpm sur $]0; +\infty[$

En 0^+ : $f(t) \sim t^{1-\beta} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{>0} 0$

En $+\infty$: IPP: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\beta} dt$

↳ $u: t \mapsto -\cos(t)$
↳ $v: t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ } $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

Par IPP, $\int_1^{+\infty} \frac{(t)}{t^\beta} dt$ et $\int_1^{+\infty} \beta \frac{(t)}{t^{\beta+1}}$ sont de même nature

Ox, $\forall t > 1$, $\left| \beta \frac{\cos(t)}{t^{\beta+1}} \right| \leq \frac{1}{t^{\beta+1}}$

Ox, $t \mapsto \frac{1}{t^{\beta+1}}$ est intégrable en $+\infty$ car $\beta+1 > 1$ (Riemann).
Donc $\int_0^{+\infty} \sin(t^\alpha) dt$ cvg

Exercice 8

- Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -evn, K partie compacte de E et $f: K \rightarrow K$ une application tq $\forall (x, y) \in K^2, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$ (*)

- 1) La suite $(f^n(x))$ est à valeurs dans K , qui est compact, il existe donc $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tq $(f^{\theta(n)}(x))$ cvg dans K
De même, pour $(f^{\theta(n)}(y))$, donc, il existe $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tq $(f^{\psi(n)}(y))$ converge dans K
Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \psi(n) \geq n$ donc $(f^{\psi(n)}(x))$ est extraite de $(f^{\theta(n)}(x))$ et donc converge dans K
En posant $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ convient
 $n \mapsto \theta \circ \psi(n)$

- 2) On spécialise (*) à : $\begin{cases} x \leftarrow f^{\psi(n+1) - \psi(n)}(x) \\ y \leftarrow x \end{cases}$ ce qui donne :
 $\|f^{\psi(n+1) - \psi(n)}(x) - f(x)\| \geq \|f^{\psi(n+1) - \psi(n)}(x) - x\|$

On obtient alors, en appliquant $\psi(n)$ fois successivement (*) pour

- $x \leftarrow f^{\psi(n+1) - \psi(n) + i}(x)$ avec $i = 1, i = 2, \dots, i = \psi(n)$
- $y \leftarrow f^i(x)$

$$\text{Donc, } 0 \leq \|f^{\psi(n+1) - \psi(n)}(x) - x\| \leq \|f^{\psi(n+1) - \psi(n) + 1}(x) - f(x)\|$$

$$\vdots$$

$$\leq \|f^{\psi(n+1)}(x) - f^{\psi(n)}(x)\| \quad (**)$$

Or, $(f^{\psi(n)}(x))$ cvg et $(f^{\psi(n+1)}(x))$ aussi (car extraite) vers la même limite
Ainsi, par φ^0 de la norme, $\|f^{\psi(n+1)}(x) - f^{\psi(n)}(x)\| \xrightarrow{+\infty} 0$
d'inégalité (**) permet de conclure par th des gendarmes que :

$$\|f^{\psi(n+1) - \psi(n)}(x) - x\| \xrightarrow{+\infty} 0$$

Ainsi, $f^{\psi(n+1)}(x) \xrightarrow{+\infty} x$. Idem pour y .

- 3) On spécialise (*) $\psi(n+1) - \psi(n) - 1$ fois avec

$$\begin{cases} x \leftarrow f^{i+1}(x) & (\text{avec } i = 1, \dots, i = \psi(n+1) - \psi(n) - 1) \\ y \leftarrow f^{i+1}(y) \end{cases}$$

$$\text{ce qui donne, } 0 \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \|f^2(x) - f^2(y)\|$$

$$\vdots$$

$$\leq \|f^{\psi(n+1) - \psi(n)}(x) - f^{\psi(n+1) - \psi(n)}(y)\|$$

Ainsi, en passant à la limite, on a : $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$

D'où, avec (*): $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

- 4) Continuité: f est 1-lipschitzienne donc continue

Injectivité: Soit $x, y \in K, f(x) = f(y)$
Alors $\|f(x) - f(y)\| = 0$ d'où $x = y$

Surjectivité: Soit $x \in K$, mq $x \in f(K)$: $f(K)$ est fermé dans E ($f \in \mathcal{C}^0$)
Nous savons que x est limite d'une suite d'éléments de $f(K)$ donc $x \in f(K)$ (fermé)

INT

$$\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln(\cos(\frac{1}{t})) dt$$

♥: $f: t \mapsto \ln(\cos(\frac{1}{t}))$ est cpm sur $] \frac{2}{\pi}; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{En } +\infty: \ln(\cos(\frac{1}{t})) &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1 - \frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2})) \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2} < 0 \end{aligned}$$

D'après le critère de Riemann, $t \mapsto -\frac{1}{2t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$

$$\text{En } \frac{2}{\pi}: \cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

$$\text{Donc } \cos(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2} - x - \frac{(\frac{\pi}{2} - x)^3}{6} + o((\frac{\pi}{2} - x)^3)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \ln(\cos(\frac{1}{x})) &= \ln(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x})^3}{6} + o(\frac{1}{x^3})) \\ &= \ln(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}) + \underbrace{\ln(1 - \frac{(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x})^2}{6} + o(\frac{1}{x^3}))}_{\xrightarrow{x \rightarrow 2/\pi} 0} = o(\ln(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x})) \end{aligned}$$

$$\underset{x \rightarrow \frac{2}{\pi}}{\sim} \ln(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x})$$

$$\hookrightarrow \text{étudions } \int_{2/\pi}^a \ln(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}) dx$$

$$\text{On pose } \varphi \left| \begin{array}{l} [0; \alpha] \rightarrow [\frac{2}{x}, a] \\ x \mapsto \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \end{array} \right., \text{ à faire...}$$