

Ex 2Q1) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 = 1 \}$ compacte ?Comme $A \subset \mathbb{R}^2$; A compacte $\iff A$ fermé et bornéeSoit $n \in \mathbb{N}$ On pose $(x_n = \sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}}$; $(y_n = \sqrt[n]{1-n})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n^2 + y_n^3 = 1 = n + 1 - n$$

Donc: $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^\mathbb{N}$

$$\text{or: } \|(x_n, y_n)\|_\infty \geq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

Donc A n'est pas bornée. Donc A n'est pas compacte.Q2) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 2 \}$ compacte ?Hg $B \subset (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^\mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} (x, y)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \\ y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \end{cases}$$

Montrons que $(x, y) \in B$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 \leq 2 \quad (*)$$

$$\text{or: } f: \begin{cases} (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 \end{cases} \quad \text{Car polynomiale}$$

Par passage à la limite sur (*);

(2)

$$x^2 + xy + y^2 \leq 2$$

D'où $(x, y) \in B$.

Par caractérisation séquentielle du fermé, $B \subset \mathbb{R}^2$

Montrons que B est bornée pour $\|\cdot\|_2$

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Soit $(x, y) \in B$

Alors $x^2 + y^2 + xy \leq 2$

donc $x^2 + y^2 \leq 2 - xy$
 $\leq 2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad ((x+y)^2 \geq 0)$

donc $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq 2$

donc $\sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2 \leq 2$

donc B est bornée.

donc Comme $B \subset \mathbb{R}^2$; B compact
 $\Leftrightarrow B$ fermé et bornée.

D'où B est compacte.

Ex 26

$(\mathbb{R}; \|\cdot\|)$ est un

Q1) Supp $S(0, 1)$ compacte

$\mathbb{R}_+ \quad B(0, 1)$ compacte

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1] \times S(0_5,1) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

on pose $K = [0,1] \times S(0_5,1)$

• $[0,1] \times S(0_5,1)$ est un compact dans $\mathbb{R} \times E$ comme produit de 2 compacts.

• M_q $f|_{E^0}$ par caractérisat° séquentielle.

Soit $\begin{array}{l} (\lambda, x) \in K \\ (\lambda_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \end{array}$

tel que $(\lambda_n, x_n) \xrightarrow{N} (\lambda, x)$

donc $\begin{array}{ccc} \lambda_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{R} & \lambda \\ x_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{R} & x \end{array}$

$M_q \quad f(\lambda_n, x_n) \xrightarrow{H.U} f(\lambda, x)$

ie $\| \lambda_n x_n - \lambda x \| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \| \lambda_n x_n - \lambda x \| \leq \| \lambda_n x_n - \lambda_n x \| + \| \lambda_n x - \lambda x \|$$

$$\leq \underbrace{\|\lambda_n\|}_{\substack{\rightarrow \|\lambda\| \\ \text{majoré}}} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\rightarrow 0} + \|\lambda\| \underbrace{\|\lambda_n - \lambda\|}_{\rightarrow 0}$$

Par thm d'encadrement: $\lambda_n x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda x$

Cours: $f([0,1] \times S(0_5,1))$ compacte.

Reste à mg $f([0,1] \times S(0_5,1)) = \overline{B(0_E, 1)}$

[C] Soit $\bar{z} \in f(K)$

Alors $\exists (\lambda, x) \in K$ tq $\bar{z} = f(\lambda, x) = \lambda x$

$$\|x\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} \leq 1 \quad \text{c'est } x \in B(0, 1)$$

1) Soit $x \in \overline{B(0, 1)}$

$$\boxed{x \neq 0} \quad x = f\left(\|x\|, \frac{x}{\|x\|}\right)$$

$0 \leq \|x\| \leq 1$
 $\frac{x}{\|x\|} \in S(0, 1)$

$$\boxed{x = 0} \quad u \in S(0, 1) \text{ quelconque,}$$

$$0 = f(0, u)$$

Q2) Supp $\overline{B(0, 1)}$ compacte

$\text{Id}_{S(0, 1)}$ compacte.

$S(0, 1)$ fermé dans $\overline{B(0, 1)}$

donc $S(0, 1)$ compacte

Ex 7

Q1) f continue car 1-lip.

$$\begin{array}{c} g \\ \downarrow \\ x \end{array} \begin{array}{c} K \longrightarrow K \\ \longmapsto \|f(x) - f(x)\| \end{array}$$

$$g = \|\cdot\|_K \circ (f - \text{id}_K) \quad \text{Continue.}$$

1-lip

K compact.

Thm des bornes atteintes

$$\exists x_m \in K \quad \forall x \in K \quad g(x) \geq g(x_m)$$

$$\forall x \in K \quad \|f(x) - x\| \geq \|f(x_m) - x_m\|$$

$$\text{Si } g(x_m) \neq 0$$

$$\text{donc } \underbrace{f(x_m)}_{\in K} \neq \underbrace{x_m}_{\in K}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\|f(f(x_m)) - f(x_m)\|}_{g(f(x_m))} < \underbrace{\|f(x_m) - x_m\|}_{g(x_m)}$$

Contradict le min de $g(x_m)$ et $f(x_m) = x_m$

" Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ tq $f(\alpha_1) = \alpha_1$ et $f(\alpha_2) = \alpha_2$.

Par l'absurde, supposons $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

$$\text{donc } \underbrace{\|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)\|}_{\geq \alpha_1} \underbrace{\|f(\alpha_1) - f(\alpha_2)\|}_{\geq \alpha_2} < \|\alpha_1 - \alpha_2\|$$

Absurde.

(P2) Soit $\alpha \in K$ tq $f(\alpha) = \alpha$ (unique)

Soit $x_0 \in K$ et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\text{tq } x_n \rightarrow \alpha$$

Rem. Supposons $\exists p \in K$ tq $x_n \rightarrow p$

Comme f est c.o.; $p = f(p)$ donc $p = \alpha$.

Comme K est compacte ; $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ c.v.} \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ a une l. v.a.}$

Soit $\varphi: N \rightarrow N$ tq $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ c.v.}$

Pq $x_{\varphi(n)} \longrightarrow \alpha$

Ex Intégrale

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ Nature $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} dx$
 $f: x \mapsto \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha}$ est général sur $[2, +\infty[$
et positive (donc CV $\Leftrightarrow$ ACV)

Si $\alpha = 1$

Soit $A > 2$

$$\begin{aligned} \int_2^A \frac{\ln(x)^\beta}{x} dx &= \left[\frac{\ln(x)^{\beta+1}}{\beta+1} \right]_2^A \\ &= \frac{\ln(A)^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{\ln(2)^{\beta+1}}{\beta+1} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\beta+1 > 0) \end{aligned}$$

Donc f n'est pas intégrable en $+\infty$

Si $\alpha > 1$

Posons $\gamma = \frac{\alpha+1}{2} > 1$

donc: $\frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{x^\gamma} \right)$

car: $\frac{\ln(x)^\beta}{x^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\alpha-\gamma > 0)$
(Croissances comparées: logarithme vs γ -puissance)

or: $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$ est intégrable en $+\infty$ par Riemann
($\gamma > 1$)

Par théorème de comparaison, f est intégrable en $+\infty$

Si $\alpha \leq 1$

on a: $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(x)$

car: $\frac{1}{\ln(x)^\beta x^{1-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (1-\alpha > 0)$

on sait que $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (Riemann).

Par contreposée du théorème de comparaison, f n'est pas intégrable en $+\infty$

Extrait écrit CCIMP MP

Limite éventuelle de $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$ qd $x \rightarrow 0$

Ou: $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

donc $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

donc $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{\tan^2(x) - x^2}{x^2 \tan^2(x)}$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + \frac{2}{3}x^6 + o(x^6)} = o(x^4)$$

$$= \frac{\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{2}{3}$$

$\Delta_3(0)$ de $e^{\sin(x)}$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ on peut donc développer.

$$\underbrace{e^{\sin(x)}}_{=f(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^2 \leftarrow x^2 + o(x^3)$$

$$+ \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^3 + o(x^3)$$

$$= (x^2 + o(x^3)) \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$T_0: y = 1 + x$$

$$f(x) = (1+x) \sim \frac{x^2}{2} > 0$$

$$y = f(0) + f'(0)x$$