

SOMMAIRE

• Exercice 39 (poly cours)

- ↳ Construction de vecteurs
- ↳ Simplification de normes / distances
- ↳ Boules fermées
- ↳ Convexité et segments

⚠ Utilisation des schémas pour se repérer

(Corrigé par Belge)

• Exercice 47 (poly cours)

- ↳ Construction de suites
- ↳ Théorèmes et passage limite
- ↳ Boule ouverte
- ↳ Partie bornée

⚠ : Méthode de passage à la limite

(Corrigé par Valentin)

• Exercice 25 (TD)

- ↳ Distance / Norme
- ↳ Seq de suites convergentes
- ↳ Passage limite
- ↳ Sous-suites

⚠ : utiliser les sous-suites

(Corrigé par Gabriel Q, Belge)

• Exercice 22 (TD)

- ↳ Construction par récurrence
- ↳ Absurdité
- ↳ Valeur adhérence

à réviser

(Corrigé par Thomas)

Exercice 39 :

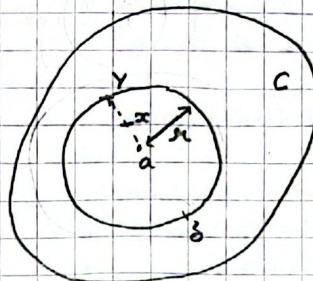
• Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$, $\varepsilon > 0$. Soit C un convexe de E tel que $S(a, \varepsilon) \subset C$. Montrons que $Bg(a, \varepsilon) \subset C$.

• Soit $x \in Bg(a, \varepsilon)$ tel que $x \neq a$ (on traitera le cas $x = a$ plus tard).
Notons $y = a + \frac{x-a}{\|x-a\|} \varepsilon$ et $z = a + \frac{a-x}{\|x-a\|} \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \|y-a\| &= \left\| a + \frac{x-a}{\|x-a\|} \varepsilon - a \right\| \quad (*) \\ &= \frac{\|x-a\|}{\|x-a\|} \varepsilon = \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \end{aligned}$$

$$\text{Aussi, } \|z-a\| = \varepsilon \quad (**)$$

(*) et (**) assurent que $y \in C$ et $z \in C$



De plus, C est convexe (hypothèse) donc, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\lambda z + (1-\lambda)y \in C$

$$\begin{aligned} \text{Posons } \lambda &= \frac{\|x-y\|}{2\varepsilon}, \text{ alors } \|x-y\| = \left\| x - a + \frac{a-x}{\|x-a\|} \varepsilon \right\| \\ &= \varepsilon - \|a-x\| \quad (\varepsilon > \|a-x\|) \\ &= \varepsilon - \|a-x\| \end{aligned}$$

$$\text{Or, } 0 \leq \|a-x\| \leq \varepsilon \quad (*)$$

$$\text{Donc, } -\varepsilon \leq -\|a-x\| \leq 0 \quad \xrightarrow{+ \varepsilon}$$

$$\text{Et aussi, } 0 \leq \varepsilon - \|a-x\| \leq \varepsilon \text{ donc } \boxed{0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}}$$

$$\text{Alors, } y + \lambda(z-y) = y + \frac{\|x-y\|}{2\varepsilon} (z-y)$$

$$= y + \frac{\|x-y\|}{2\varepsilon} \frac{a-x}{\|x-a\|} \varepsilon = a + \frac{x-a}{\|x-a\|} \varepsilon + (\varepsilon - \|a-x\|) \frac{a-x}{\|a-x\|}$$

$$= a + \frac{x-a}{\|x-a\|} \varepsilon + \varepsilon \frac{(a-x)}{\|a-x\|} - a + x = x$$

$$\text{donc } x \in [y, z] \text{ donc } \boxed{x \in C}$$

• 2^e cas: $x = a$:

Supposons $E \neq \{0_E\}$. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$ unitaire

Posons $y = a + \varepsilon u$ et $z = a - \varepsilon u$, y et $z \in S(a, \varepsilon)$

On pose $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}y + \left(1 - \frac{1}{2}\right)z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\varepsilon u + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\varepsilon u = a$$

$$\boxed{\text{Donc } x \in C}$$

$$\text{Donc } \boxed{Bg(a, \varepsilon) \subset C}$$

Exercice 47

1) A est bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall a \in A, \|a\| \leq M$ (définition 44)

Ainsi, $\forall (a_1, a_2) \in A^2$

$$\|a_1 - a_2\| \leq \|a_1\| + \| -a_2 \| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$\leq 2M \quad (\text{définition } A \text{ bornée})$$

Ainsi, $\{\|a_1 - a_2\| \mid (a_1, a_2) \in A^2\} = F$ est une partie non vide (F non vide donc $0 \in A$) et majorée donc $\delta(A)$ est bien défini.

2) Soit $(x, y) \in B(a, r)^2$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \|x - y\| &= \|x - a + a - y\| \\ &\leq \|x - a\| + \|y - a\| \\ &\leq 2r \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{je retiens cette} \\ \text{méthode en pensant} \\ \text{à la relation de Cauchy} \end{array} \right\}$$

D'autre part, soit $x \in B(a, r) \setminus \{a\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x_n = a + \frac{x-a}{\|x-a\|} \left(x - \frac{x}{n}\right)$ et ainsi :

$$\|x_n - a\| = \frac{\|x-a\|}{\|x-a\|} r \left|1 - \frac{1}{n}\right| < r \text{ donc } a + \frac{x-a}{\|x-a\|} \left(x - \frac{x}{n}\right) \in B(a, r) \quad (\text{homogénéité de la norme})$$

$$\text{De la même manière, } \underbrace{a - \frac{x-a}{\|x-a\|} \left(x - \frac{x}{n}\right)}_{y_n} \in B(a, r)$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \|x_n - y_n\| &= \left\| a + \frac{x-a}{\|x-a\|} r \left(1 - \frac{1}{n}\right) - a + \frac{x-a}{\|x-a\|} r \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\| \\ &= \frac{\|x-a\|}{\|x-a\|} \left| 2r \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = \boxed{2r \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Comme $x_n, y_n \in B(a, r)$, $\|x_n - y_n\| \leq \delta(B(a, r))$, donc, en passant à la limite, $2r \leq \delta(B(a, r)) \leq 2r$

$$\hookrightarrow \boxed{2r}$$

$\hookrightarrow$ réviser cet exercice avec une boule fermée

Exercice 25:

- Infos: $l^\infty(\mathbb{R}) = B(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } (u_n) \text{ bornée}\}$
- $\forall (u_n) \in l^\infty(\mathbb{R}), \|u_n\|_\infty = \sup_n (u_n)$
- A partie non vide de $l^\infty(\mathbb{R})$, $\inf_{u \in A} \|u - a\|_\infty$

1) $\mathcal{E}_0 = \{u \in l^\infty(\mathbb{R}) \mid u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\}$, posons $\underline{1} = (1, \dots, 1)$ (je note les suites constantes de terme a $\underline{a}$)

$$\text{Alors } d(\underline{1}, \mathcal{E}_0) = \inf_{u \in \mathcal{E}_0} \underbrace{\|u - \underline{1}\|_\infty}_{\text{noté } A} = \inf(A)$$

On a $\underline{0} = (0, \dots, 0) \in \mathcal{E}_0$ (car la suite de $0 \rightarrow 0$) et $\|\underline{0} - \underline{1}\|_\infty = 1$

Donc $\boxed{1 \in d(\underline{1}, \mathcal{E}_0)}$ $\rightarrow$ car $1 \in A$ donc forcément, $\inf(A) \leq 1$

• Montrons que 1 minore A

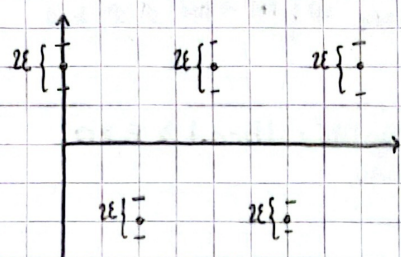
Soit $(u_n) \in \mathcal{C}_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \| (u_n) - \underline{1} \|_\infty$

En faisant tendre n vers $+\infty$, $1 - 1 \leq \| (u_n) - \underline{1} \|_\infty$

donc, $1 \leq \| (u_n) - \underline{1} \|_\infty$

donc, par passage à l'infini, $\forall (u_n) \in \mathcal{C}_0$, $1 \leq d(\underline{1}, \mathcal{C}_0)$

2) Notons $\mathcal{C} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ cvg}\}$, déterminons $d((-1)^n, \mathcal{C})$



→ (barres d'occurrences en physique)

• Soit $(a_n) \in \mathcal{C}$

Montrons que $\| (-1)^n - (a_n) \|_\infty \geq 1$

Soit $l \in \mathbb{R}$ tq $(a_n) \xrightarrow{+\infty} l$

↳ Alors $(a_{2n}) \xrightarrow{+\infty} l$ et $(a_{2n+1}) \xrightarrow{+\infty} l$ (sous suites cvg)

Aussi, $\| (-1)^{2n} - a_{2n} \| \xrightarrow{+\infty} |1 - l|$ (continuité de |.) et $\| (-1)^{2n+1} - a_{2n+1} \|_\infty \xrightarrow{+\infty} |1 + l|$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| (-1)^{2n} - a_{2n} \| \leq \| (-1)^n - (a_n) \|_\infty$
 $\| (-1)^{2n+1} - a_{2n+1} \| \leq \| (-1)^n - (a_n) \|_\infty$

Donc, par passage à la limite, $\| (-1)^n - (a_n) \|_\infty \geq \max(|l-1|, |l+1|)$

1^{er} cas: $l = 0$

Alors, $|l-1| = |l+1| = 1$

2^e cas: $l > 0$

Alors, $|l+1| = l+1$ et $l+1 > 1$

3^e cas: $l < 0$

Alors, $|l-1| = 1-l \geq 1$

donc $\| (-1)^n - (a_n) \|_\infty \geq 1$
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\| (-1)^n - 0 \| = 1$
donc $\| (-1)^n - \underline{0} \|_\infty = 1$
donc $d((-1)^n, \mathcal{C}) = 1$

Exercice 22:

• Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée et possédant une unique valeur d'adhérence $a \in \mathbb{R}$
 Supposons par l'absurde que (u_n) ne converge pas vers a

• $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists K \in \mathbb{N}_{\geq N}, |u_K - a| > \varepsilon$ (*)
 ↳ que l'on choisira

Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ↗

Construisons φ par récurrence:

↳ Pour $n = 0$, $\exists K_0 \geq n$ tel que $|u_{K_0} - a| > \varepsilon$, posons $\varphi(0) = K_0$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons construit $0 \leq K_0 < \dots < K_n$ entiers tels que
 $|u_{K_0} - a| > \varepsilon, \dots, |u_{K_n} - a| > \varepsilon$

D'après (*): il existe $K_{n+1} \geq K_n + 1$ tq $|u_{K_{n+1}} - a| > \varepsilon$ donc $K_{n+1} > K_n$
ce qui conclut la récurrence.

Posons $\varphi \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto K_n \end{cases} \nearrow \nearrow$ par construction

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - a| > \varepsilon$ (**)

C'est à dire, $u_{\varphi(n)} \in]-\infty; a - \varepsilon[\cup]a + \varepsilon; +\infty[$

$(u_{\varphi(n)})$ est bornée donc, grâce à Bolzano, il existe $\psi \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ \nearrow \nearrow \end{cases}$ tel
que $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $b \in \mathbb{R}$

D'après (**), en passant à la limite dans l'inégalité: $|b - a| \geq \varepsilon > 0$
donc $b \neq a$ et b valeur d'adhérence de (u_n) , absurde