

TD - BVN I

Ex 12

Q1 $\begin{cases} \cdot -h \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^* \\ \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases}$

Par Jensen Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$-h\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq -\frac{1}{p}h(x) - \frac{1}{q}h(y)$$

Donc $h\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{1}{p}h(x) + \frac{1}{q}h(y) = h\left(x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\right)$

Par croissance de exp sur $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geq x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}$$

Q2 L'inégalité est claire si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ ou $y = 0_{\mathbb{R}^n}$

Soit $\begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n & \text{non tous nuls} \\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n & \text{non tous nuls} \end{cases}$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

On pose $x' = \frac{|x_i|^p}{\underbrace{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}_{>0}}$ et $y' = \frac{|y_i|^q}{\underbrace{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}_{>0}}$

En utilisant Q1 avec $x' > 0$ et $y' > 0$ on a :

$$\frac{1}{p}x' + \frac{1}{q}y' \geq (x')^{\frac{1}{p}}(y')^{\frac{1}{q}}$$

Donc $\frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q} \geq \frac{|x_i y_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$

En sommant les inegalites de $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \geq \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|_p \|y\|_q}$$

> 0

D'ou $\|x\|_p \|y\|_q \geq |\langle x, y \rangle|$

Q3)

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$; $2 \leq k$

• Séparation Supposons $\|x\|_p = 0$

Montrons que $x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Donc: $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$

Donc: $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = 0$ ($x \mapsto x^p$ bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $p \geq 1$)

Donc: $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |x_i|^p = 0$

(Somme de termes positifs)

Donc: $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |x_i| = 0$. ($x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$)

D'ou $x = 0_{\mathbb{R}^n}$

• Homogénéité Montrons que $\|2x\|_p = |2| \|x\|_p$

$$\|2x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |2x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(|2|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |2| \|x\|_p$$

Donc: $\|2x\|_p = |2| \|x\|_p$

Inégalité triangulaire

On remarque que:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} (|x_k| + |y_k|)^p &= (|x_k| + |y_k|) (|x_k| + |y_k|)^{p-1} \\ &= |x_k| (|x_k| + |y_k|)^{p-1} + |y_k| (|x_k| + |y_k|)^{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \end{aligned}$$

On a: $p > 1$; on pose $q = \frac{p}{p-1}$

$$\text{et } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$$

En appliquant Hölder

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

$$\begin{aligned} &= \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|x\|_p \|x+y\|_p^{p/q} \end{aligned}$$

De même:

$$\sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x+y\|_p^{p/q}$$

Si $x+y = 0_{\mathbb{R}^n}$, inégalité claire.

Si non:

En sommant

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{p/q}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où: } \|x+y\|_p^{p-p/q} &= \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \\ \left(p - \frac{p}{q} = p - (p-1) = 1 \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

(P4) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

or: $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad 0 \leq |x_i| \leq \|x\|_\infty$

Par croissance de $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}_+$

$$0 \leq |x_i|^p \leq \|x\|_\infty^p$$

Donc: $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \geq \|x\|_\infty^p \geq 0$

Par croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\|x\|_p \geq \|x\|_\infty$$

De plus: $0 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n \|x\|_\infty^p$

Par croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ sur $\mathbb{R}_+$

$$0 \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

Donc: $0 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$

or: $n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty = e^{\frac{1}{p} \ln(n)} \|x\|_\infty \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$

Par théorème d'encadrement:

$$\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$$

Ex 11

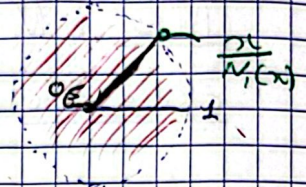
$\Leftarrow$ Claire

$\Rightarrow$ Supposons $B_{N_1}(0,1) = B_{N_2}(0,1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

- Si $x = 0$, $N_1(x) = N_2(x) = 0$
- Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} N_1\left(\frac{x}{2N_1(x)}\right) &= \left|\frac{1}{2N_1(x)}\right| N_1(x) \\ &= \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$



Dans $\frac{x}{2N_1(x)} \in B_{N_1}(0,1) = B_{N_2}(0,1)$

Dans $N_2\left(\frac{x}{2N_1(x)}\right) < 1$ et $1 > N_2\left(\frac{x}{2N_1(x)}\right) = \frac{1}{2} \frac{N_2(x)}{N_1(x)}$

Dans $N_2(x) < 2N_1(x)$

Cela a presque marche. Ajoutons cela en avec

$\frac{x}{(1+\frac{1}{n})N_1(x)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

On retrouve pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$N_2(x) < \left(1 + \frac{1}{n}\right) N_1(x)$$

Par passage à la limite dans les inégalités ci-dessus: $(n \rightarrow +\infty)$

$$N_2(x) \leq N_1(x).$$

Par symétrie des rôles de N_1 et N_2 ,

$$N_1(x) \leq N_2(x)$$

D'où:

$$N_1 = N_2.$$

2^{ème} solution: Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Posons $y = \frac{x}{N_1(x)}$

Donc $N_1(y) = 1$

alors $y \notin B_{N_2}(0, 1) = B_{N_2}(0, 1)$

Alors $N_2(y) \geq 1$

c'est à dire $\frac{N_2(x)}{N_1(x)} \geq 1$

donc $N_2(x) \geq N_1(x)$

Par symétrie des rôles
 $N_1(x) \geq N_2(x)$

D'où l'égalité

Ex 8.

Q4) Montrons qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$\|P_n\|_\infty \leq M$$

et qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$\|P_n\|_\infty' \leq R$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\|P_n\|_\infty = 1$

En effet $\left(\frac{1}{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante; positive

donc son maximum est atteint en $k=0$

Donc $M=1$ convient

$\forall n \in \mathbb{N}$ $P_n | [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

croissante car somme de
fonctions croissantes sur
 $[0, 1]$

On a:

x	0	1
P_n	1	$P_n(1)$

Donc: $\|P_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P_n(x)| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Or $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}}_{\geq 0}$

Donc: $\|P_n\|_\infty \leq e$

Donc $R = e$ convient

(Q2) Supposons par l'absurde qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} Q$ i.e tel que $\|P_n - Q\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

i.e tel que $\max_{k \in \mathbb{N}} | [P_n - Q]_k | \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (*)$

Notons $d = \deg(Q) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > d$

Nous avons que $\max_{k \in \mathbb{N}} | [P_n - Q]_k | \geq | [P_n - Q]_{d+1} |$
 $= \frac{1}{(d+1)!} \quad (1)$

1^{ère} conclusion

or d'après $(*)$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}_{N_0}$,

$\max_{k \in \mathbb{N}} | [P_n - Q]_k | \leq \frac{1}{(d+2)!} \quad (2)$

Absurde car $\frac{1}{(d+1)!} > \frac{1}{(d+2)!}$

Ainsi, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente pour la norme $\|\cdot\|_\infty$

2nd conclusion :

Dans ① ; $n \rightarrow +\infty$:

$o > \frac{1}{(d+1)}$ Ce qui est absurde.

Q3) Soit $x \in [0, 1]$ fixé

$$|P_n(x) - e^x| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right|$$

$$= \left| - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right|$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

indépendant de $x \in [0, 1]$

Par passage au sup sur $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup_{x \in [0, 1]} |P_n(x) - e^x| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \|P_n - \exp\|_{[0, 1]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement :

$$\|P_n - \exp\|_{[0, 1]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Q4) La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV-t-elle dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$?

$(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Supposons donc $P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P \in \mathbb{R}[X]$

Alors $P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P$ dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$

Par ! de la lim ; $P = \exp_{(0,1)}$ impossible car

aucune des dérivées de $\exp_{(0,1)}$ n'est identiquement nulle.