

Exercice 24:

- Soit F un fermé, f une fonction polynomiale, montrons que $f(F)$ est fermé.

Soit $(x_n) \in f(F)^{\mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \rightarrow x$ (Gabriel a échangé les notations usuelles des éléments de l'image / antécédant, généralement, les x sont pour les anté et les y pour les images, c'est pas le cas ici)
 Or, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in f(F)$
 Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in F, f(y_n) = x_n$

1^{ère} idée: Mq $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

Par l'absurde, supposons $|y_n| \rightarrow +\infty$

Cette idée est fautive, par exemple pour $y_n \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Par l'absurde, supposons (y_n) non majorée. Construisons φ extractrice tel que $y_{\varphi(n)} \rightarrow +\infty$. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Pobons: $P(n)$: "Il existe des entiers $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$ tq $0 < y_{\varphi(0)}, 1 < y_{\varphi(1)}, \dots, n < y_{\varphi(n)}$ " (on cherche à exploiter le th de comparaison, cas, toute f est str $\uparrow$ ne diverge pas forcément vers $+\infty$)

Ini: (y_n) est non majorée, donc 0 ne majore pas

Il existe donc $\varphi(0) \in \mathbb{N}, y_{\varphi(0)} > 0$, donc $P(0)$

Héxé: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$, $(y_k)_{k \geq \varphi(n)+1}$ est non majorée, donc $n+1$ ne majore pas.

Il existe donc $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}, \begin{cases} \varphi(n+1) > \varphi(n)+1 \\ y_{\varphi(n+1)} > n+1 \end{cases}$ donc $P(n+1)$

Donc, par récurrence, il existe φ extractrice tq $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$

Or, f n'est pas constante et polynomiale, et, en particulier, $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \text{dom}(f)x^{\deg(f)}$

Donc $|f(x)| \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} +\infty$

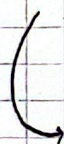
Donc $|f(y_{\varphi(n)})| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$

C'est absurde $\neg P(n)$ donc (y_n) est bornée, donc, par théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe φ extractrice et $l \in \mathbb{R}, y_{\varphi(n)} \rightarrow l$. Or, F est fermé, donc $l \in F$

Or, $f(y_{\varphi(n)}) \rightarrow x$. Par unicité de la limite: $x = f(l)$

Donc: $x \in f(F)$

Donc: $f(F) = f(F)$



Important: De toute suite réelle non majorée, je suis extraire une ss-suite qui DV vers $+\infty$

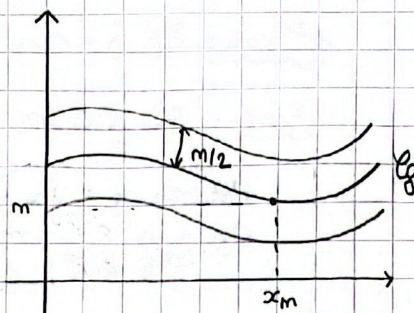
D'une suite numérique bornée, je peux extraire une suite CV (BW)

Exercice 113 :

• Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $A = \{f \in E \mid f > 0\}$

1) Montrons que $A \notin E$

• Soit $f \in A$, f est continue sur le segment $[0,1]$ (par def de E)
 Par théorème des bornes atteintes, $\exists x_m \in [0,1]$,
 $\forall x \in [0,1], 0 < f(x_m) \leq f(x)$



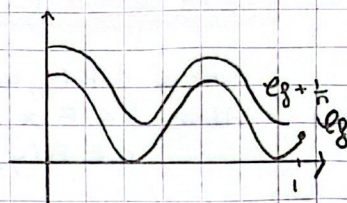
• Posons $\varepsilon = \frac{m}{2} > 0$, on a $B(f, \varepsilon) \subset A$

Soit $g \in B(f, \varepsilon)$, i.e. $g \in E$ tq $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$
 Aussi, pour tout $x \in [0,1]$, $-\varepsilon < g(x) - f(x) < \varepsilon$
 c'ad : $-\frac{m}{2} + f(x) < g(x) < \frac{m}{2} + f(x)$
 Or, $f(x) > m > \frac{m}{2}$ d'où $g > 0$. Ainsi $A \notin E$

• Montrons que $\bar{A} = \{f \in E \mid f \geq 0\} = B$

□ Soit $f \in \bar{A}$, il existe $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$
 Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in [0,1]$, $0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 Donc, par encadrement, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$
 Or, $f_n(x) \geq 0$, donc, par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$, $f(x) \geq 0$
 D'où $f \in B$

□ Soit $f \in B$ (i.e. $f \geq 0$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = f + \frac{1}{n}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n > f \geq 0$, i.e. $f_n \in A$
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$,



$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \text{ (indé de } x)$$

$$\text{Donc } \|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Donc $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$, d'où, par caractérisation séquentielle de l'adhérence $f \in \bar{A}$

2) $B = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$, montrons que $B \notin E$

• Soit $(g_n) \in B^{\mathbb{N}}$ et $f \in E$ tq $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, montrons que $f \in B$. Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $0 \leq |g_n(0) - f(0)| \leq \|g_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, donc, par encadrement,
 $g_n(0) \rightarrow f(0)$

Or $g_n(0) = 0$, d'où, par passage à la limite en $+\infty$, $f(0) = 0$. Ainsi, $f \in B$

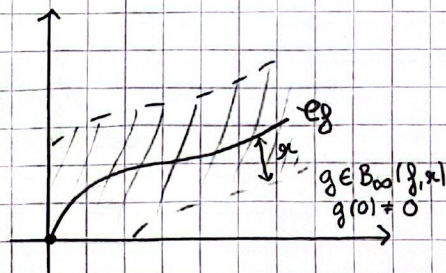
Par CSF, $B \in E$

• Montrons que $\overset{\circ}{B} = \emptyset$. Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in \overset{\circ}{B}$.

Donc, $\exists \varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon) \subset B$. On pose $g = f + \frac{\varepsilon}{2}$
 $g \in B(f, \varepsilon)$

Or, $g(0) = f(0) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \neq 0$ donc $g \notin B$ absurde.

CL: $\overset{\circ}{B} = \emptyset$



Exercice 17 :

- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit $C \subset E$ convexe
- Soit $a, b \in \bar{C}$. Soit $\lambda \in [0, 1]$ → Soit $(x, y) \in C^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$

1^{er} cas : Si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, $\lambda a + (1-\lambda)b \in \bar{C}$ (car $a, b \in \bar{C}$)

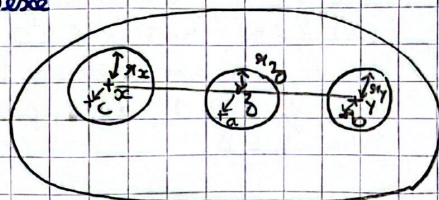
2^e cas : Si $\lambda \in]0, 1[$

- Posons $x = \lambda a + (1-\lambda)b$.
On a $a \in \bar{C}$, donc, $\exists (a_n) \in C^{\mathbb{N}}$ tq $a_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$
 $b \in \bar{C}$, donc, $\exists (b_n) \in C^{\mathbb{N}}$ tq $b_n \xrightarrow{\|\cdot\|} b$ (caractérisation séquentielle adhérence)
- Posons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda a_n + (1-\lambda)b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$
Par opération sur les limites, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Donc $x \in \bar{C}$ (c.s.a.)
Donc $\lambda a + (1-\lambda)b \in \bar{C}$

Donc $\bar{C}$ est convexe

- Supposons C convexe, montrons que $\dot{C}$ est convexe

Soit $x, y \in \dot{C}$. Soit $\alpha_x > 0$ tq $B(x, \alpha_x) \subset C$
Soit $\alpha_y > 0$ tq $B(y, \alpha_y) \subset C$
Soit $\lambda \in [0, 1]$. Posons $z = y + \lambda(x-y)$
et $\alpha_z = \frac{1}{2} \min(\alpha_x, \alpha_y)$. Montrons que $B(z, \alpha_z) \subset C$



Soit $a \in B(z, \alpha_z)$. Posons $b = y + a - z$ et $c = x + a - z$
Alors $b \in B(x, \alpha_x)$, $\|a - z\| \leq \alpha_z < \alpha_x$
 $c \in B(y, \alpha_y)$, $\|a - z\| \leq \alpha_z < \alpha_y$

$$\text{Or } a = b + \lambda(c - b) \\ = y + a - z + \lambda(x - y) = a$$

Donc, puisque b et $c \in C$ et que C est convexe, $a \in C$
Donc $\dot{C}$ est convexe

Exercice 27

- Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ evn, $C \subset E$ un ouvert convexe de E , contenant 0 , borné, symétrique par rapport à 0 . $\forall x \in E$, $\|x\|_C = \inf_{\substack{t > 0 \\ \frac{x}{t} \in C}} t$

1) Montrons que $\|\cdot\|_C$ est bien définie sur E .
Montrons que J est munée par 0 .

C est un ouvert : $\exists \alpha > 0$, $B(0, \alpha) \subset C$

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$,

$$\frac{\alpha}{2\|x\|} x \in B(0, \alpha) \text{ donc } \frac{\alpha}{2\|x\|} \in J$$

Si $x = 0_E$

$$x \in C \text{ donc } 1 \in J$$

Ainsi, J est non vide et munée de $\mathbb{R}_+^*$, elle possède une borne inf dans $\mathbb{R}_+$

2) Séparation: Soit $x \in E$ tel que $\|x\|_C = 0$

$$\exists (t_n) \in J^{\mathbb{N}} \text{ tq } \begin{cases} t_n \rightarrow 0 \\ x/t_n \in C \end{cases} \rightarrow \inf(J) = 0. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \text{ ne munée pas } J$$

$\hookrightarrow C$ est borné : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in C, \|x\| \leq M$

$$0x, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{x}{t_n} \in C; \quad \left\| \frac{x}{t_n} \right\| \leq M$$

Donc, $0 \leq \|x\| \leq M t_n$, et, par passage à la limite : $0 \leq \|x\| \leq 0$

$$\text{D'où } x = 0_E$$

Homogénéité: Soit $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, mq $\|\lambda x\|_C = |\lambda| \|x\|_C$

Cas si $\lambda = 0$

Si $\lambda > 0$:

$$\hookrightarrow J_x = \{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in C\}$$

$$\hookrightarrow J_{\lambda x} = \{t > 0 \mid \frac{\lambda x}{t} \in C\}$$

Soit $t \in J_x$, $\frac{x}{t} \in C$ donc $\frac{\lambda x}{\lambda t} \in C$ donc $\lambda t \in J_{\lambda x}$

$$\text{Or } t \in J_x \Rightarrow \lambda t \in J_{\lambda x}$$

$$\lambda t \geq \|\lambda x\|_C$$

$$\text{donc } t \geq \frac{\|\lambda x\|_C}{\lambda}$$

$$\text{donc } \|x\|_C \geq \frac{\|\lambda x\|_C}{\lambda}$$

$$\text{donc } \lambda \|x\|_C \geq \|\lambda x\|_C \quad (*)$$

En spécialisant $(*)$ $\begin{cases} \lambda \leftarrow 1/\lambda \\ x \leftarrow \lambda x \end{cases}$, $\frac{1}{\lambda} \|\lambda x\|_C \leq \|x\|_C$
d'où $\|\lambda x\|_C = \lambda \|x\|_C$

Si $\lambda < 0$:

Si $\lambda x \in C$, $-\lambda x \in C$ et analogue.

$\hookrightarrow$ Montrer $\triangleleft \Delta$

3) Montrons que $B_{\|\cdot\|_C}(0,1) = C$

□ Soit $x \in B_{\|\cdot\|_C}(0,1)$

Donc, il existe $t \in]x, t < 1$

Où, C est convexe donc $[0, \frac{x}{t}] \subset C$

Donc, $\forall \lambda \in [0,1], \lambda \frac{x}{t} + (1-\lambda)0 \in C$

En particulier, lorsque $\lambda = t \in [0,1], \boxed{x \in C}$

□ Soit $x \in C$

C est ouvert, donc, $\exists \varepsilon > 0, \boxed{B(x, \varepsilon) \subset C}$

On a $\|x\|_C \leq 1$ car $\frac{x}{t} \in C$

Où, $\|x(1+\frac{\varepsilon}{2}) - x\|_C = \frac{\varepsilon}{2} \|x\|_C \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc $x(1+\frac{\varepsilon}{2}) \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset C$

$\frac{x(1+\frac{\varepsilon}{2})}{1+\frac{\varepsilon}{2}} \in C$

$= \frac{x}{1+\frac{\varepsilon}{2}} \in C$ donc $\|x\|_C \leq \frac{1}{1+\varepsilon/2} < 1$ donc $\boxed{x \in B(0,1)}$

