

Ex 16 $(E, \|\cdot\|)$ evn. F ser de E tel que $\vec{0} \notin F$ Montrons que $F = E$.

□ Claire.

□ Soit $x \in E$ Si $x = 0_E$; alors $x \in F$ Si $x \neq 0_E$: $\exists (q, r) \in F \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ $B(q, r) \subset F$.

$$\lambda = \frac{rx}{2\|x\|} + a \in E$$

$$\begin{aligned} \|\lambda - a\| &= \left\| \frac{rx}{2\|x\|} \right\| = \left| \frac{r}{2\|x\|} \right| \|x\| \\ &= \frac{r}{2} < r \end{aligned}$$

D'où $\lambda \in B(q, r)$ et donc $\lambda \in F$

$$\underbrace{\frac{2\|x\|}{r}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(\lambda - a)}_{\in F} \in F$$

donc $\frac{2\|x\|}{r} \left(\frac{rx}{2\|x\|} \right) \in F$

D'où $x \in F$

Ex 18

$$l^2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum x_n^2 \text{ converge} \right\}$$

Rappel: Théorème de domination pour les séries à termes positives

$\sum a_n$, $\sum b_n$ deux séries à termes réels tq
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n \leq b_n$

① $\sum b_n$ CV $\Rightarrow \sum a_n$ CV

② $\sum a_n$ DVG $\Rightarrow \sum b_n$ DVG

Si $\sum a_n$ est une série numérique alors:

$$\sum |a_n| \text{ CV} \Rightarrow \sum a_n \text{ CV}$$

Q1 • $(0)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{R})$

• Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Montrons que $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{R})$

ie: $\sum (\lambda^2 x_n^2 + 2\lambda\mu x_n y_n + \mu^2 y_n^2)$ converge.

On sait que $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(x_n + y_n)^2 \geq 0.$$

donc $\frac{1}{2}(\sum x_n^2 + \sum y_n^2) \geq \sum |x_n y_n| \geq 0$

Par théorème de domination pour les séries à termes positifs,

$\sum |x_n y_n|$ converge. donc $\sum x_n y_n$ converge.

D'où: $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{R})$

Q2) Montrons que $\|\cdot\|_2$ est une norme.

C'est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | $\ell^2(\mathbb{N})^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$
 converge par Q1

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$,
 $\lambda \in \mathbb{K}$.

• Linéarité à gauche

$$\begin{aligned} \langle \lambda(x_n) + (y_n), (z_n) \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda x_n + y_n) z_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda x_n z_n + y_n z_n) \end{aligned}$$

Par linéarité
 car $\sum \lambda x_n z_n$ et $\sum y_n z_n$ convergent

$$\hookrightarrow = \lambda \langle (x_n), (z_n) \rangle + \langle (y_n), (z_n) \rangle$$

• Symétrie

$$\begin{aligned} \langle (x_n), (y_n) \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{x_n y_n}_{\in \mathbb{R}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{y_n x_n}_{\in \mathbb{R}} \quad \leftarrow \text{car } (x, y) \text{ commutative} \\ &= \langle (y_n), (x_n) \rangle \end{aligned}$$

• Linéarité à droite

Conséquence de la symétrie et du résultat de la linéarité à gauche.

• Positivité

$$\langle (x_n), (x_n) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \geq 0 \quad (\text{car } \forall n \in \mathbb{N}; x_n^2 \geq 0)$$

• Définition

Supposons $\langle (x_n), (x_n) \rangle = 0$.

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = 0$.

or $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n^2 \geq 0.$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n^2 = 0.$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = 0.$

On en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire

Donc $\| \cdot \|_2$ est une norme.

Q3) $F = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \quad x_n = 0 \}$

Montrons que F est un sous-espace de $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$

• $(0)_{n \in \mathbb{N}} \in F.$

• Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F ; \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\exists N_x \in \mathbb{N} \forall n \geq N_x \quad x_n = 0.$

$\exists N_y \in \mathbb{N} \forall n \geq N_y \quad y_n = 0.$

On pose $N = \max(N_x, N_y)$

$\forall n \geq N, \quad \lambda x_n + \mu y_n = 0.$

• Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$

$\exists N_x \in \mathbb{N} \forall n \geq N_x \quad x_n = 0.$

Alors : $\left(\sum_{k=0}^n x_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne à partir du rang N_x

Par l'absurde ; Supposons que $F \not\subset \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$

$u^{(1)} = \left(\frac{1}{1}, 0, \dots, 0, \dots \right)$

$u^{(2)} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots \right)$

...

$$\forall n \in \mathbb{N}; \forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Toutes les $u^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) appartiennent à F .

Montrons que $u^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_2} \left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \left\| u^{(n)} - \left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*} \right\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\underbrace{u_k^{(n)} - \frac{1}{k}}_{\substack{\frac{1}{k} \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ sinon}}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Car reste d'une $\leq$ cv

En admettant, on mg $\overline{F} = \ell^2(\mathbb{R})$

Ex 22

Q1) À revoir

Q2) Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; $f \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$

tel que $\|f_{\varphi_n} - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

dg: true

$$|f_{\varphi_n}(\omega) - f_{\varphi_n}(\frac{\omega}{2\varphi_n})| \leq 2\|f_{\varphi_n} - f\|_{\infty} + |f(\omega) - f(\frac{\omega}{2\varphi_n})|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$|f_{\varphi_n}(\omega) - f_{\varphi_n}(\frac{\omega}{2\varphi_n})| \leq \underbrace{|f_{\varphi_n}(\omega) - f(\omega)|}_{\leq \|f_{\varphi_n} - f\|_{\infty}} + |f_{\varphi_n}(\frac{\omega}{2\varphi_n}) - f(\omega)|$$

$$\begin{aligned} &+ |f(\frac{\omega}{2\varphi_n}) - f(\omega)| \rightarrow \leq |f_{\varphi_n}(\omega) - f(\omega)| \\ &+ |f_{\varphi_n}(\frac{\omega}{2\varphi_n}) - f(\frac{\omega}{2\varphi_n})| \\ &+ |f(\omega) - f(\frac{\omega}{2\varphi_n})| \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underbrace{|f_{\varphi_n}(\omega) - f_{\varphi_n}(\frac{\omega}{2\varphi_n})|}_{=0} \leq 2\|f_{\varphi_n} - f\|_{\infty} + \underbrace{|f(\omega) - f(\frac{\omega}{2\varphi_n})|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \quad \text{par } \mathcal{C}^0 \text{ de } f$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges
($n \rightarrow +\infty$)

On obtient $0 \leq 0$ ce qui est absurde. Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence f dans $(\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$