

TD – Espaces vectoriels normés 1

Notation. — La lettre **K** désigne le corps **R** ou **C**.

Exercice 1 ★☆☆ — Soit A une partie non vide d'un **R**-espace vectoriel normé E .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.

2. Soit $x \in E$. Démontrer que :

$$x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x.$$

3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .

4. Soit B une autre partie non vide de E . Démontrer que $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

banqueCcinp34

Exercice 2 ★☆☆ — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E . On considère les propositions suivantes :

(P1) L'application f est continue en a .

(P2) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$.

Prouver que les assertions P1 et P2 sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense dans E et soient f et g deux applications continues de E dans F . Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

banqueCcinp35

Exercice 3 ★☆☆ — Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans **R**. On pose, pour tout $f \in E$:

$$N_{\infty}(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

1. Démontrer que N_{∞} et N_1 sont deux normes sur E .

2. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq \alpha N_{\infty}(f)$.

3. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_{∞} .

4. Démontrer qu'il n'existe aucune constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $N_{\infty}(f) \leq \beta N_1(f)$.

banqueCcinp37

Exercice 4 ★☆☆ — Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties non vides de E .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

(b) Démontrer que :

$$A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}.$$

2. Démontrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Démontrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

(b) Démontrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée. On pourra prendre $E = \mathbf{R}$.

banqueCcinp44

Exercice 5 ★☆☆ — Soient E un **R**-espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . On note $\bar{A}$ l'adhérence de A .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\bar{A}$.

(b) Prouver que, si A est convexe, alors $\bar{A}$ est convexe.

2. On pose, pour tout $x \in E$:

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

(a) Soit $x \in E$. Prouver que :

$$d_A(x) = 0 \iff x \in \bar{A}.$$

(b) On suppose que A est fermée et que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t) d_A(y).$$

Prouver que A est convexe.

banqueCcinp45

Exercice 6 ★☆☆ — Munissons $\mathbf{R}[X]$ des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|'_\infty$ définies par, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$:

$$\|P\|_\infty = \max_{k \in \mathbf{N}} |P]_k| \quad \text{et} \quad \|P\|'_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|'_\infty$ sont des normes.
2. Existe-t-il une constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\|P\|_\infty \leq \alpha \|P\|'_\infty$?
3. Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\|P\|'_\infty \leq \beta \|P\|_\infty$?

comparaisonNormesEspacePolynomes1

Exercice 7 ★☆☆ — Munissons $\mathbf{R}[X]$ des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|'_1$ définies par, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$:

$$\|P\|'_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\|'_1 = \int_0^1 |P(x)| \, dx.$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|'_1$ est bien une norme sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Existe-t-il une constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\|P\|'_\infty \leq \alpha \|P\|'_1$?
3. Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\|P\|'_1 \leq \beta \|P\|'_\infty$?

comparaisonNormesEspacePolynomes2

Exercice 8 ★☆☆ — Munissons $\mathbf{R}[X]$ des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|'_\infty$ définies par, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$:

$$\|P\|_\infty = \max_{k \in \mathbf{N}} |P]_k| \quad \text{et} \quad \|P\|'_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|.$$

Notons $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de polynômes de terme général $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Démontrer que $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|'_\infty$.
2. Démontrer que $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est divergente pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. Munissons $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|'_\infty$ définie par, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$:

$$\|f\|'_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Démontrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$, vue comme suite d'éléments de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, converge. Déterminer sa limite.

4. La suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge-t-elle dans $(\mathbf{R}[X], \|\cdot\|'_\infty)$?

comportementAsymptotiqueSuitePolynomesNormesDifferentes

Exercice 9 ★☆☆ — Munissons $\mathbf{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$:

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |P]_k|.$$

Le sous-espace $F = \text{Vect}(\{X^{2n} : n \in \mathbf{N}\})$ de $\mathbf{R}[X]$ est-il fermé ?

caractereFermeSousEspaceVectorielPolynomesNorme1

Exercice 10 ★☆☆ — Munissons :

$$\ell^\infty(\mathbf{R}) = \{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \text{la suite } u \text{ est bornée}\}$$

de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par, pour tout $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$:

$$\|(u_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|.$$

1. Notons $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, u_k soit la suite constante de terme général $\frac{1}{k+1}$.

Démontrer que $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} 0$.

2. Notons $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ définie de terme général $v_k = \left(\frac{k}{n+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$. La suite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est-elle bornée dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$?

3. La suite $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ de terme général $w_k = (\sin(kn))_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle bornée ? Admet-elle une valeur d'adhérence ?

suiteEspaceSuitesNormeInfinie1

Exercice 11 ★☆☆ — Soient E un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E . Démontrer que les boules ouvertes $B_{N_1}(0, 1)$ et $B_{N_2}(0, 1)$ sont égales si et seulement si $N_1 = N_2$.

boulesUniteOuvertesEgalesDeuxNormes

Exercice 12 ★☆☆ — Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \geq 1$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, posons :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $q \geq 1$ l'unique réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$:

$$x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{1}{p} x + \frac{1}{q} y \quad [\text{inégalité de Young}].$$

2. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad [\text{inégalité de Hölder}].$$

3. Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. En remarquant que :

$$(|x_k| + |y_k|)^p = |x_k| (|x_k| + |y_k|)^{p-1} + |y_k| (|x_k| + |y_k|)^{p-1}$$

montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\|x\|_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \|x\|_\infty$.

inegalitesYoungHoelderNormesPEspacesKn

Exercice 13 ★☆☆ — Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ et $p \geq 1$. Pour toute fonction $f \in E$, notons :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. En s'inspirant de l'exercice 12, démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur E .

2. Démontrer que, pour toute fonction $f \in E$, $\|f\|_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \|f\|_\infty$.

normesPEspacesFonctions

Exercice 14 ★☆☆ — Notons $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, posons :

$$N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| \, dx$$

1. Démontrer que N est une norme sur E .
2. Trouver la meilleure constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $N(f) \leq \alpha \|f\|_\infty$.
3. Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \beta N(f)$?

norme1TordueExponentielleEspacesFonctions

Exercice 15 ★☆☆ — Notons $E = \mathbf{R}[X]$. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$\theta_n(P) = \int_0^1 P(t) t^n \, dt.$$

Posons $N(P) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\theta_n(P)|$. Démontrer que $N(P)$ est bien définie et qu'elle induit une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

enseaNormeEspacePolynomesMoments

Exercice 16 ★☆☆ — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Démontrer que E est le seul sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide.

tpeSousEspaceVectorielInterieurNonVide

Exercice 17 ★☆☆ — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $C \subset E$ une partie convexe. Démontrer que l'adhérence et l'intérieur de C sont convexes.

tpeAdherenceInterieurPartieConvexe

Exercice 18 ★☆☆ — Notons $\ell^2(\mathbf{R})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que la série $\sum x_n^2$ converge. Pour toute suite $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{R})$, notons :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}.$$

1. Démontrer que $\ell^2(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
2. Démontrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\ell^2(\mathbf{R})$.
3. Posons F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbf{R})$. L'ensemble F est-il une partie fermée de $\ell^2(\mathbf{R})$?

tpeCaractereFermeSousEspaceVectorielSuitesNorme2

Exercice 19 ★☆☆ — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - 1/n \\ 2n \left(x - 1 + \frac{1}{n} \right) & \text{si } 1 - \frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{2n} \\ -2n (x - 1) & \text{si } 1 - \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 .
2. Démontrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3. Est-ce que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers la fonction nulle dans $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$?

convergenceSimpleVersusConvergenceUniformeSuiteFonctions

Exercice 20 ★☆☆ — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ une suite telle que la suite réelle $(\|u_n\|)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence.

suiteSansValeurAdherenceEspaceVectorielNormeGeneral

Exercice 21 ★☆☆ — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(nx) \end{array} \right.$$

Supposons que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admette une valeur d'adhérence f dans $(\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbf{R}), \|\cdot\|_{\infty})$. On dispose alors d'une application $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que :

$$\|f_{\varphi(n)} - f\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbf{R}} 0.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\left| f_{\varphi(n)}(0) - f_{\varphi(n)}\left(\frac{\pi}{2\varphi(n)}\right) \right| \leq 2 \|f_{\varphi(n)} - f\|_{\infty} + \left| f(0) - f\left(\frac{\pi}{2\varphi(n)}\right) \right|.$$

Que peut-on en déduire ?

suiteFonctionsBorneesSansValeurAdherenceNormeInfini

Exercice 22 ★☆☆ — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée et possède une unique valeur d'adhérence. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
2. Si on suppose seulement que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence, la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge-t-elle nécessairement ?

uniqueValeurAdherenceVersusConvergenceSuiteReelle

Exercice 23 ★★☆☆ — Munissons $\ell^{\infty}(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ définie dans l'exercice 10.

1. Soit $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^{\infty}(\mathbf{R})$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, U_k est une suite bornée notée $(u_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$. Supposons que $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers une suite $U = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^{\infty}(\mathbf{R})$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u_n$.
2. Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite $(u_n^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers un réel u_n , la suite $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge-t-elle vers la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$?

suiteEspaceSuitesNormeInfinie2

Exercice 24 ★★☆☆ — Soit une application $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ polynomiale et non constante. Démontrer que, pour toute partie fermée F de $\mathbf{R}$, $f(F)$ est une partie fermée de $\mathbf{R}$.

applicationPolynomialeFerme

Exercice 25 ★★☆☆ — Munissons $\ell^{\infty}(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ définie dans l'exercice 10. Si $u \in \ell^{\infty}(\mathbf{R})$ et A est une partie non vide de $\ell^{\infty}(\mathbf{R})$, on définit la distance de u à A par :

$$d(u, A) = \inf_{a \in A} \|u - a\|_{\infty}.$$

1. Notons $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel de $\ell^{\infty}(\mathbf{R})$ constitué des suites convergeant vers 0. Déterminer la distance de la suite constante égale à 1 à $\mathcal{C}_0$.
2. Notons $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\ell^{\infty}(\mathbf{R})$ constitué des suites convergentes. Déterminer la distance de la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ à $\mathcal{C}$.

distanceSousEspaceVectorielSuitesNormeInfini

Exercice 26 ★★☆ — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est une partie fermée de E .

caractereFermeEnsembleValeursAdherenceSuite

Exercice 27 ★★☆ — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé, $C \subset E$ un ouvert convexe de E , contenant 0 , borné et symétrique par rapport à 0 (pour tout $x \in C$, $-x \in C$). Pour tout $x \in E$, posons :

$$\|x\|_C = \inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in C \right\}.$$

On dit que $\|\cdot\|_C$ est la jauge associée à C .

1. Démontrer que $\|\cdot\|_C$ est bien définie sur E .
2. Démontrer que $\|\cdot\|_C$ est une norme sur E .
3. Quelle est la boule unité ouverte pour la norme $\|\cdot\|_C$?

normeJauge

Exercice 28 ★★☆ — Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme réel de degré $n \geq 2$ scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in [-\alpha, \alpha]$, le polynôme $P(X) + \varepsilon X^{n+1}$ est scindé à racines simples dans $\mathbf{R}$.

perturbationPolynomeScindeRacinesSimplesCoefficientsReels

Exercice 29 ★★☆ — Le but de cet exercice est de montrer que toute suite réelle possède une suite extraite monotone. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose :

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \forall p > n \quad u_p < u_n\}.$$

1. On suppose que E est infini. En utilisant les éléments de E , construire une suite extraite de u qui est strictement décroissante.
2. On suppose maintenant que E est fini et non vide. Soit $N = \max(E)$. Justifier que si $n > N$, alors il existe $p > n$ tel que $u_p \geq u_n$, puis en déduire une construction d'une suite extraite de u qui est croissante.
3. Démontrer que u possède une suite extraite monotone.
4. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstraß.

extractionSuiteMonotoneSuiteReelle

Exercice 30 ★★☆ — Posons $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, notons :

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(x)^2 \, dx}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E .
2. Existe-t-il une constante $\alpha \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $N(f) \leq \alpha \|f\|_\infty$?
3. Existe-t-il une constante $\beta \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \beta N(f)$?

centraleSuplecComparaisonNormesEspaceFonctions

Exercice 31 ★★☆ — Soient $a \in]-1, 1[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Démontrer que :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff u_{n+1} - a u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

centraleSuplecCnsConvergenceZeroSuiteRelle

Exercice 32 ★★☆ — Munissons $E = \mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme. Les parties de E suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ?

$$I = \{f \in E : f \text{ est injective}\}$$

$$S = \{f \in E : f \text{ est surjective}\}$$

$$B = \{f \in E : f \text{ est bijective}\}$$

natureTopologiquePartiesEspaceFonctionsNormeInfini

Exercice 33 ★★☆☆ — Munissons $\mathbf{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_2$.



Karol Borsuk (1905-1982)

Soit C le cercle unité de $\mathbf{R}^2$ et $f : C \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $M \in C$ tel que $f(-M) = f(M)$. Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Borsuk-Ulam.



Stanisław Marcin Ulam (1909-1984)

theoremeBorsukUlamDimension1

Exercice 34 ★★☆☆ — On munit $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme. On se propose de démontrer le théorème de Weierstraß, énoncé ci-dessous.

Théorème. — Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, il existe une suite de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$, telle que :

$$P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$$

Ici les polynômes sont identifiés à leurs fonctions polynomiales associées de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$.



Karl Weierstraß (1815-1897)

Pour ce faire, fixons une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ et un réel $\varepsilon > 0$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$$

2. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq Cn$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

3. Justifier l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$:

$$|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit le polynôme de Bernstein :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

Soit $x \in [0, 1]$. On partitionne les entiers k entre 0 et n en :

$$X = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \alpha \right\}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

5. Conclure qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|B_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$.



Sergueï Bernstein (1880-1968)

minesPontsTheoremeDensitePolynomialeWeierstrassPolynomesBernstein

Exercice 35 ★★☆ — Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. H un hyperplan de E . Démontrer que H est soit fermé soit dense dans E .

hyperplanFerméOuDense

Exercice 36 ★★★ — Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

ensembleValeursAdherenceSuiteReelleIntervalle

Exercice 37 ★★★ — Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est soit infini, soit fini de cardinal inférieur ou égal à 2.

minesPontsEnsembleValeursAdherenceSuiteReelleInfiniCardinalInferieur2

Exercice 38 ★★★ — Munissons $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme définie par, pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$:

$$\|A\| = \max_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket} |[A]_{i,j}|.$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(\|A^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Démontrer que les valeurs propres de A sont toutes de module inférieur ou égal à 1.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
 - (a) Démontrer que $C^2 = C$ et $\text{Spec}_{\mathbb{C}}(C) \subset \{0, 1\}$.
 - (b) Démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de module inférieur ou égal à 1 et qu'une valeur propre de B de module 1 est égale à 1.

suitePuissancesMatriceMnC

Exercice 39 ★★★ — On munit $[0, 1]^2$ de la norme $\| \cdot \|_{\infty}$. Soit K une partie fermée de $[0, 1]^2$ telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, l'ensemble :

$$F_x := \{y \in [0, 1] : (x, y) \in K\}$$

est un intervalle non vide. Démontrer que K intersecte la droite d'équation $y = x$.

minesPontsIntersectionFerméCarrePremiereBissectrice

Exercice 40 ★★★ — Déterminer toutes les applications $f : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$ continues telles que, pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbf{U}^2$:

$$f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2).$$

xMorphismesContinusCercleUnite

Exercice 41 ★★★ — Que dire d'une partie convexe et dense d'un espace vectoriel normé ?

xPartiesConvexeDense

Exercice 42 ★★★ — Soit un entier $n \geq 2$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

xAdherenceEnsembleMatricesDiagonalisablesMnC

Exercice 43 ★★★ — Soit un entier $n \geq 2$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

ensSuitePuissancesBornéesMnC

Exercice 44 ★★★ — Soit un entier $n \geq 2$. Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe similitude, i.e. l'ensemble :

$$\{P^{-1}AP : P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})\}$$

est fermée.

xClasseSimilitudeFermeeMnC

Exercice 45 ★★★ — Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si il existe une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices semblables à A , qui converge vers 0.

xCnsMatriceNilpotenteSuiteMatricesSemblablesConvergeZeroMnC
