

Exercice:

• $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

1) Donner un DL, de $\det(I_n + H)$ quand $H \rightarrow 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \det(I_n + H) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n [I_n + H]_{i, \sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n \setminus \text{Id}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n [I_n, H]_{i, \sigma(i)} + \prod_{i=1}^n (1 + h_{i,i}) \\ &= \sum_{d=0}^{n-2} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ |\text{Fix}(\sigma)|=d}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{i, \sigma(i)} + h_{i, \sigma(i)}) + \prod_{i=1}^n (1 + h_{i,i}) \end{aligned}$$

sépare id des autres permut.
partition par nbr de points fixes

• Choisissons $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\sigma \in S_n$ tel que $|\text{Fix}(\sigma)| = d \leq n-2$ tel que $H \in \overline{B(0,1)}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow |\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{i, \sigma(i)} + h_{i, \sigma(i)})| &\leq (1 + \|H\|_\infty)^d \|H\|_\infty^{n-d} \\ &\leq (1 + \|H\|_\infty)^n \|H\|_\infty^2 \end{aligned}$$

Donc $\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{i, \sigma(i)} + h_{i, \sigma(i)}) = o(H)$

• Ainsi, $\det(I_n + H) = \prod_{i=1}^n (1 + h_{i,i}) + o(H)$

$\hookrightarrow = ?$ (on utilise Viète)

$\hookrightarrow \prod_{i=1}^n (1 + h_{i,i}) = ?$

$\hookrightarrow (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_i} \right) X^{n-i} + X^n$

$\hookrightarrow (X + K_{1,1}) \cdots (X + K_{n,n})$

$= X^n + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \prod_{k=1}^i h_{j_k, j_k} \right) X^{n-i}$

$= X^n + T_{\mathcal{A}}(H) X^{n-1} + \sum_{i=2}^n \sigma_i(H) X^{n-i}$

$\hookrightarrow X \leftarrow 1 :$

$\prod_{i=1}^n (1 + h_{i,i}) = 1 + T_{\mathcal{A}}(H) + \sum_{i=2}^n \sigma_i(H)$

$\leq \sum_{\{j_1, \dots, j_i\} \in \{1, \dots, n\}^i, j_1 < \dots < j_i} \|H\|_\infty^i$

- Ainsi, $\det(I_n + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} \det(I_n) + \text{Tr}(H) + o(H)$
 $\hookrightarrow$ linéaire en H

2) Alors, $\det$ est différentiable en I_n et $d\det(I_n) = \text{Tr}$

3) Comme $\det$ est polynomiale en ses coeff, elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À l'aide des dérivées directionnelles, retrouver Q2.

→ Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$,
 $d\det(I_n) \cdot H = D_H \det(I_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(I_n + tH) - \det(I_n)}{t}$

Soit $t \neq 0$,

→ $\det(I_n + tH) = t^n \det\left(\frac{1}{t}I_n + H\right)$
 $= t^n \chi_{-H}\left(\frac{1}{t}\right)$

Poseons $\chi_{-H} = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Donc $\chi_{-H}\left(\frac{1}{t}\right) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots + \frac{a_n}{t^n}$

Donc $\det(I_n + tH) = a_n + a_{n-1}t + \dots + a_0 t^n$

Ainsi, $D_H \det(I_n) = a_{n-1} = -\text{Tr}(-H) = \text{Tr}(H)$

4) En déduire que $\det$ est diff en $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et donner $d\det(A)$

- Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\det(A + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} \det(A) (\det(I_n + A^{-1}H))$

Si $H \rightarrow 0$, alors $A^{-1}H \rightarrow 0$ car $\|A^{-1}H\|_\infty \leq n \|A^{-1}\|_\infty \|H\|_\infty$

$\det(A + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} \det(A) (\det(I_n) + \text{Tr}(A^{-1}H) + o(H))$

$\underset{H \rightarrow 0}{=} \det(A) + \text{Tr}(\det(A) A^{-1}H) + o(H)$
 $\hookrightarrow$ linéaire

CCL: $\det$ est diff en $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $d\det(A) \cdot H =$

$\text{Tr}(\det(A) A^{-1}H)$

$= \langle \text{com}(A), H \rangle$

Exercice 8 :

• $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est différentiable sur E

• Soit $a \in E$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} \langle u(a+h), a+h \rangle \\ &= \langle u(a), a \rangle + \underbrace{\langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle}_{L(h) \rightarrow \text{à montrer}} + \langle u(h), h \rangle \end{aligned}$$

• Soit $h \neq 0$,

$$\left| \frac{\langle u(h), h \rangle}{\|h\|} \right| = \left| \left\langle u\left(\frac{h}{\|h\|}\right), h \right\rangle \right| \leq \|u\| \|h\|_2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $\|u\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|u(x)\|_2$

Par théorème d'encadrement, $\langle u(h), h \rangle = o(h)$

$$\text{Donc } f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$$

Ainsi, f est différentiable et $\forall (a, h) \in E^2$, $df(a)h = \langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle$

Exercice 5

• Soit $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

$$\begin{aligned} &\| \frac{f(a+th) - f(a) - df(a)h}{t} \|_2 \underset{th \rightarrow 0}{=} \| \frac{f(a) + df(a)h + o(th) - f(a)}{t} \|_2 \\ &\quad - \| df(a)h \|_2 \\ &= \| \frac{o(th)}{t} \|_2 = \| \frac{o(th)}{\underbrace{\|th\|_2}_{\rightarrow 0}} \|_2 \underset{th \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

• Donc $D_h f(a)$ existe et vaut $df(a)h$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} 2) \text{ On suppose : } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}_{D_{e_i} f(a)} &= \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}_{D_{e_i} g(a)} \\ &= df(a) \cdot e_i = dg(a) \cdot e_i \end{aligned}$$

• Donc, $df(a)$ et $df(g)$ coïncident sur $e_1, \dots, e_n$

Ex CCINP n° 52:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

① Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mq $x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (E).

Par équivalence:

$$(E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0 \text{ toujours vrai}$$

Donc E est vraie

② a. Si $(x, y) = (0, 0) \rightarrow$ pas de problème
Si $(x, y) \neq (0, 0)$, mq $x^2+y^2-xy \neq 0$.

On sait d'après 1 que $x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2) > 0$
(car $(x, y) \neq (0, 0)$)

b. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x, y)| &= \frac{|x y^4|}{|x^2+y^2-xy|} \leq \frac{2y^4}{(x^2+y^2)} \\ &\leq \frac{2(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)} \\ &\leq 2(x^2+y^2) \\ &= 2\|(x, y)\|_2^2 \\ &\rightarrow 0 \\ &(x, y) \rightarrow (0, 0) \end{aligned}$$

Donc f continue en $(0,0) \iff \alpha = 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par quotient de polynomes dont le dénominateur est $\neq 0$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$

③ a. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par le quotient de polynomes dont le dénominateur est $\neq 0$.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{(b-2a)b^4}{(a^2+b^2-ab)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{2b^5 - 3ab^4 + 4a^2b^3}{(a^2+b^2-ab)^2}$$

b. Soit $t \neq 0$

$$\frac{f((0,0) + t(1,0)) - f((0,0))}{t} = \frac{f(t,0)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0

$$\frac{f((0,t)) - f((0,0))}{t} = \frac{t^4}{t^3} = t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0

c. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \iff \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (critère $\mathcal{C}^1$)

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| &= \left| \frac{(b-2a)b^4}{(a^2+b^2-ab)^2} \right| \leq \frac{4|b-2a|b^4}{(a^2+b^2)^2} \\ &\leq \frac{4 \times 3 \| (a,b) \|_2 \| (a,b) \|_2^2}{\| (a,b) \|_2^2} \end{aligned}$$

$$\leq 12 \|(a,b)\|_2 \xrightarrow{(a,b) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| = \left| \frac{2b^3 - 3ab^2 + 4a^2b^3}{(a^2+b^2-ab)^2} \right|$$

$$\leq \frac{56 \|(a,b)\|_2^2}{\|(a,b)\|_2^2} \xrightarrow{(a,b) \rightarrow (0,0)} 0$$

Par critère C^2 , comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues et existent,
 f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$