

Exercice 90 (corrigé par Rhita et Ezequiel)

1) Énoncé: Soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
 $(u, v) \mapsto g(u, v)$

+q pr $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$ $\xrightarrow{\text{💡}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)(u, v) = 0$ $\in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Il q il existe $\varphi, \gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = \varphi(u) + \gamma(v)$

• Réduction:

Soit $u \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, \cdot): v \mapsto \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, \cdot) \right)' = 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, \cdot) \text{ est donc constante sur } \mathbb{R} \text{ en particulier } \forall v \in \mathbb{R}, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, 0)$$

🔑 Pour remonter à g : intégrer

Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ $(g(\cdot, v_0))'$

$$\int_0^{u_0} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v_0) du = g(u_0, v_0) - g(0, v_0)$$

Ainsi: $g(u_0, v_0) = \underbrace{\int_0^{u_0} \frac{\partial g}{\partial u}(u, \cdot) du}_{\varphi(u_0)} + \underbrace{g(0, v_0)}_{\varphi(v_0)}$ $\xrightarrow{\text{on a tué la dépendance en } v}$

→ Montrons que $\gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ car linéaire} \\ v_0 \mapsto (0, v_0)$$

Donc $\gamma = g \circ L$ est $\mathcal{C}^2$ par composition

→ Montrons que $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$L_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ car linéaire} \\ u \mapsto (u, 0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ car } g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

Donc $\frac{\partial g}{\partial u} \circ L_2$ est $\mathcal{C}^1$ par composition

Par théorème fondamental de l'analyse :

$$\varphi: u_0 \mapsto \int_0^{u_0} \frac{\partial g}{\partial u}(u, 0) du \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{💡 } \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)(u, v) &= 0 = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v_0) - \frac{\partial g}{\partial u}(u, 0) \\ &= \int_0^{v_0} \boxed{\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \right)} dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) Énoncé: Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ tq

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t)$$

a) Énoncé: Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(u, v) \mapsto f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$

• Bur: Il y a g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Exprimer par $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et des dérivées partielles d'ordre 2 de f

• Réduction:

$$L: (u, v) \mapsto (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) \quad \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ car linéaire}$$

$$g = f \circ L \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ par composition}$$

$$\text{Soit } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u}(\alpha u + \beta v) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\ast) + \frac{\partial}{\partial u}(\gamma u + \delta v) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(\ast)$$

$$= \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(\ast) + \gamma \frac{\partial f}{\partial t}(\ast)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)(u, v) =$$

$$= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial v} (\alpha u + \beta v) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\star) + \frac{\partial}{\partial v} (\gamma u + \delta v) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(\star) \right) \\ + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial v} (\alpha u + \beta v) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(\star) + \frac{\partial}{\partial v} (\gamma u + \delta v) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\star) \right)$$

$$= \alpha \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\star) + (\alpha \delta + \gamma \beta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(\star) + \gamma \delta \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\star)$$

b) Enoncé: En choisissant $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tq :

i) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ inversible

ii) $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v) = 0$

But: Il y a il existe $\varphi, \gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, f(x, t) = \varphi(x+ct) + \gamma(x-ct)$

Réduction:

Prenons $\alpha = \beta = c, \gamma = 1$ et $\delta = -1$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \delta - \gamma \beta = -2c \neq 0$$

Pour ces choix, il existe, d'après 1), $\varphi, \gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$g(u, v) = \varphi(u) + \gamma(v) = f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$

$$\begin{cases} x = \alpha u + \beta v = c(u+v) \\ t = \gamma u + \delta v = u-v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{x}{c} \\ u-v = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{x}{c} \\ -2v = t - \frac{x}{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{c} - \left(\frac{x}{2c} - \frac{t}{2} \right) = \frac{x}{2c} + \frac{t}{2} = \frac{1}{2c} (x+ct) \\ v = \frac{x}{2c} - \frac{t}{2} = \frac{1}{2c} (x-ct) \end{cases}$$

$$\text{Donc } f(x, t) = \underbrace{\varphi\left(\frac{1}{2c}(x+ct)\right)}_{\tilde{\varphi}(x+ct)} + \underbrace{\gamma\left(\frac{1}{2c}(x-ct)\right)}_{\tilde{\gamma}(x-ct)}$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi\left(\frac{\cdot}{2c}\right) \quad \tilde{\gamma} = \gamma\left(\frac{\cdot}{2c}\right)$$

Exercice:

• Énoncé:

- ① Montrer $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \subset \mathbb{R}^2$
- ② Justifier $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{x^2}{x-y}\right)$ est diff.
- ③ Calculer $df_{(x, y)}$ pour $\forall (x, y) \in \mathcal{V}$

• Réduction: ① (Corrigé par Louis)

$$\text{On pose } F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

$$\text{Montrer } F \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{Soient } (x, y) \in \mathbb{R}^2, ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}} \text{ tq } (x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (x, y)$$

$$\text{Montrer } (x, y) \in F$$

$$\text{Comme } \mathbb{R}^2 \text{ est un espace produit on sait que } x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \text{ et } y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y$$

$$\text{Or pour } \forall n \in \mathbb{N}, x_n = y_n \text{ donc } y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

$$\text{Par unicité de la limite } x = y$$

$$\text{Finalement } (x, y) \in F \text{ i.e. } F \text{ est fermé donc } \mathcal{V} \text{ est un ouvert.}$$

• Réduction: ② (Corrigé par Louis)

$$\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} \text{ différentiable car rationnelle}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x^2}{x-y}$$

$$\cos \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ donc différentiable sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Alors par composée } f = \cos \circ \varphi \text{ est différentiable}$$

• Réduction : ③ (corrigé par Louis)

Soit $(x, y) \in \mathcal{U}$

On cherche $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$

$$= \left(\frac{2x(x-y) - x^2}{(x-y)^2} \sin\left(\frac{x^2}{x-y}\right), -\frac{x^2}{(x-y)^2} \sin\left(\frac{x^2}{x-y}\right) \right)$$

$$= \left(-\left(\frac{2x}{x-y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right) \sin\left(\frac{x^2}{x-y}\right), -\frac{x^2}{(x-y)^2} \sin\left(\frac{x^2}{x-y}\right) \right)$$

Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d f(x, y) \cdot (h_1, h_2) = \langle \nabla f(x, y), (h_1, h_2) \rangle$$

• Réduction ①: (corrigé par Adam)

Posons $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - y \end{cases} \quad \mathcal{C}^\infty$ car polynomiale

$$\mathcal{U} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

Donc par image réciproque d'un ouvert, $\mathcal{U}$ est un ouvert

Exercice 7 (corrigé par Paolo)

• Énoncé: On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne, définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par: pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = (\sin(xy), \cos(2x+2y))$

1) • But: Montrer que f est différentiable en tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire sa matrice Jacobienne en (x, y)

• Réduction:

Considérons: $L: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + 2y \end{cases}$

L est $\mathcal{C}^1$ car polynomiale et $\sin$ est $\mathcal{C}^1$ donc $f_1 = \sin \circ L$ est $\mathcal{C}^1$ par composition de $\mathcal{C}^1$
idem f_2 est $\mathcal{C}^1$ donc f est $\mathcal{C}^1$.

Considérons $B = \mathcal{C}_{\text{univ}}^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ Mat}_B(df(x, y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x+2y) & 2\cos(x+2y) \\ -2\sin(x+2y) & -\sin(x+2y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) But: Mq pr $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $df(x, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est 3-lipschitzienne

Etant donné que $df(x, y)$ est linéaire, de source un espace de dim. finie, alors $df(x, y)$ est lipschitzienne ssi :

$$\exists c > 0, \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, \|df(x, y) \cdot (h_1, h_2)\| \leq c \|(h_1, h_2)\|$$

Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} &\|(\cos(x+2y)h_1 + 2\cos(x+2y)h_2, -2\sin(x+2y)h_1 - \sin(x+2y)h_2)\|_2^2 \\ &= \|(\cos(x+2y)(h_1+2h_2), -\sin(x+2y)(2h_1+h_2))\|_2^2 \\ &= \underbrace{\cos(x+2y)^2}_{\leq 1} (h_1+2h_2)^2 + \underbrace{\sin(x+2y)^2}_{\leq 1} (2h_1+h_2)^2 \end{aligned}$$

$$\leq (h_1+2h_2)^2 + (2h_1+h_2)^2$$

$$= 5(h_1^2 + h_2^2) + 8h_1h_2 \quad * h_1^2 + h_2^2 \geq 2h_1h_2$$

$$\leq 9(h_1^2 + h_2^2)$$

$$\text{Par croissance de } \sqrt{\cdot}, \quad \|df(x, y) \cdot h\| \leq 3\|h\|$$

Donc $df(x, y)$ est 3-lip.

Exercice 15: (corrigé par Mr. Blottière)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tq pour $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = y$ $\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Soit $(x_0, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) dx = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$$
$$= x_0 y$$

$$\forall (x_0, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = x_0 y$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_0^{y_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) dy - \int_0^{y_0} \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) dy = \int_0^{y_0} x_0 y dy$$

$$\text{i.e. } f(x_0, y_0) - f(x_0, 0) - (f(0, y_0) - f(0, 0)) = \frac{x_0 y_0^2}{2}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \underbrace{f(x, 0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(0, y) - f(0, 0)}_{\varphi(y)} + \frac{xy^2}{2}$$

F