

TD - Calcul différentiel

Séance 2

Ex 90
du cours

(Q1)

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto g(u, v)$$

$\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 g(u, v)}{\partial v \partial u} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) (u, v) = 0 \\ \uparrow \\ \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

Rq: $\exists \varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$g(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$$

Soit $u \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, \cdot) : v \mapsto \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, \cdot) \right)' = 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$\frac{\partial g}{\partial u}(u, \cdot)$ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, 0)$$

Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{u_0} \boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(u, v_0)} du = g(u_0, v_0) - g(0, v_0)$$

$(g(\cdot, v_0))'$

$$g(u_0, v_0) = \underbrace{\int_0^{u_0} \frac{\partial g}{\partial u}(u, 0) du}_{\psi(u_0)} + \underbrace{g(0, v_0)}_{\psi(v_0)}$$

Montrons que $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\begin{array}{l} \mathcal{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v_0 \mapsto (0, v_0) \end{array} \quad \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ (linéaire)}$$

Donc $\psi = g \circ \mathcal{L}$ est $\mathcal{C}^2$ par composition.

Montrons que $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \mapsto (u, 0) \end{array} \quad \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ car linéaire.}$$

$\frac{\partial g}{\partial u}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Donc : $\frac{\partial g}{\partial u} \circ \mathcal{L}_2$ est $\mathcal{C}^1$ par composition

Par théorème fondamental de l'analyse

$$\gamma: u_0 \mapsto \int_0^{u_0} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) du \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Q2) a) $c \in \mathbb{R}^2$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \\ (x, t) \mapsto f(x, t)$$

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t)$$

Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

kg g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

$$L: (u, v) \mapsto (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) \quad = (*)$$

$\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (linéaire)

$g = f \circ L$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u}(\alpha u + \beta v) \frac{\partial f}{\partial x} (*)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u}(\gamma u + \delta v) \frac{\partial f}{\partial y} (*)$$

$$= \alpha \frac{\partial f}{\partial x} (*) + \gamma \frac{\partial f}{\partial t} (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) (u, v) = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial v} (\alpha u + \beta v) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (*) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} (\alpha u + \beta v) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} (*) \right)$$

$$+ \gamma \left(\frac{\partial}{\partial v} (\alpha u + \beta v) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} (*) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} (\alpha u + \beta v) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (*) \right)$$

$$= \alpha \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (*) + (\alpha \beta + \gamma \beta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} (*)$$

$$+ \gamma \beta c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (*)$$

b) On veut $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\bullet \alpha \delta - \gamma \beta \neq 0$$

$$\bullet \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial u \partial v} (u, v) = 0$$

$$\alpha = \beta = c \quad \text{et} \quad \gamma = 1 \quad \vee \quad \delta = -1$$

Donc $-2c \neq 0$

Pour ces choix, il existe d'après $\mathcal{P}_c$,

$\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad g(u, v) &= \varphi(u) + \psi(v) \\ &= \varphi(\delta u + \beta v; \delta u + \delta v) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \delta u + \beta v = c(u+v) \\ \delta u = \delta u + \delta v = u-v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{x}{c} \\ u-v = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{c} - \left(\frac{x}{2c} - \frac{t}{2}\right) = \frac{x}{2c} + \frac{t}{2} = \frac{1}{2c}(x+ct) \\ v = \frac{x}{2c} - \frac{t}{2} = \frac{1}{2c}(x-ct) \end{cases}$$

Donc
$$f(x, t) = \varphi\left(\frac{1}{2c}(x+ct)\right) + \psi\left(\frac{1}{2c}(x-ct)\right)$$

$\tilde{\varphi}(x+ct)$ $\tilde{\psi}(x-ct)$
où $\tilde{\varphi} = \varphi\left(\frac{\cdot}{2c}\right)$ où $\tilde{\psi} = \psi\left(\frac{\cdot}{2c}\right)$

Rx:

① $\text{Kg } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \subset \mathbb{R}^2$

② Justifier $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{x^2}{x-y}\right)$ est diff

③ Calculer $df(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$

Q1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(x, y) \mapsto x - y$ est linéaire et $\mathbb{R}^2$ de dimension fini

On a: $F = \varphi^{-1}(\{0\})$ fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue

On: $\Omega = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ ouvert.

Donc: $\mathbb{R}^2 \setminus F = \Omega$ est ouvert par passage au complémentaire

Q2) $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentielle (rationnelle)
 $(x, y) \mapsto \frac{x^2}{x-y}$

$\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc différentiable sur $\mathbb{R}$

D'où: f différentiable comme composé de f différentiables $f = \cos \circ \varphi$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{On cherche } \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

$$= \left(-\left(\frac{2x}{x-y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right) \sin\left(\frac{x^2}{x-y}\right) \right.$$

$$\left. ; \frac{-x^2}{(x-y)^2} \sin\left(\frac{x^2}{x-y}\right) \right)$$

Soient $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$df(x, y) \cdot (h_1, h_2) = \langle \nabla f(x, y), (h_1, h_2) \rangle$$

Ex 7 : Q1) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\underbrace{\sin(x+2y)}_{f_1(x, y)}, \underbrace{\cos(2x+y)}_{f_2(x, y)} \right)$$

$(x, y) \mapsto x+2y \in \mathbb{R}$ car sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale
 $\sin$ est $\mathcal{C}^1$

Par composition ; f_1 est $\mathcal{C}^1$

Idem pour f_2

Comme f_1, f_2 sont $\mathcal{C}^1$; f est $\mathcal{C}^1$

Q2) $B = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Mat}_B(df(x, y)) = J_{(x, y)}(f)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x+2y) & 2\cos(x+2y) \\ -2\sin(x+2y) & -\sin(2x+y) \end{pmatrix}$$

Q3) Étant donné que $df(x, y)$ est linéaire

de source, un espace de dimension finie, alors

$df(x, y)$ est lipschitzienne

$$\Rightarrow \exists C > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\|df(x, y) \cdot (h_1, h_2)\|_2 \leq C \|(h_1, h_2)\|_2$$

Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\|(\cos(x+2y)(h_1+2h_2), -\sin(x+2y)(2h_1+h_2))\|_2^2$$

$$= \cos^2(x+2y)(h_1+2h_2)^2 + \sin^2(x+2y)(2h_1+h_2)^2$$

$$\leq (h_1 + 2h_2)^2 + (2h_1 + h_2)^2$$

$$= 5(h_1^2 + h_2^2) + \underbrace{8h_1h_2}_{\leq 4(h_1^2 + h_2^2)}$$

$$\leq 9(h_1^2 + h_2^2) = 9 \|(h_1, h_2)\|_2^2$$

Par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\|df(x, y) \cdot (h_1, h_2)\| \leq 3 \|(h_1, h_2)\|_2$$

Donc, $df(x, y)$ est 3-lipschitzienne

Ex 15: $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ tq $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = y$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Soit $(x_0, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_0^{x_0} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{= y}(x, y) dx = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$$

$$= x_0 y$$

$$\forall (x_0, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = x_0 y$$

$$\text{Soit } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_0^{y_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) dy - \int_0^{y_0} \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) dy = \int_0^{y_0} x_0 y dy$$

$$\text{ie } f(x_0, y_0) - f(x_0, 0) - (f(0, y_0) - f(0, 0)) = \frac{x_0 y_0^2}{2}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \underbrace{f(x, 0)}_{\varphi(x)} + \underbrace{f(0, y) - f(0, 0)}_{\psi(y)} + \frac{x y^2}{2}$$