

①

TD - Calcul différentiel I

CCINP n°33

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Q1) Montrons que f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$. $\rightarrow$ Sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) = \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est $\mathcal{C}^0$ car polynomiale et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ Comme $\sqrt{\cdot}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est $\mathcal{C}^0$ et ne s'annule pas $(x, y) \mapsto xy$ est $\mathcal{C}^0$ car polynomiale.

Donc: f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

 $\rightarrow$ Montrons que f est continue en $(0, 0)$ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

$$|x| \leq \|(x, y)\|_2 \quad \text{et} \quad |y| \leq \|(x, y)\|_2$$

Provenant de :

$$\begin{aligned} 0 &\leq y^2 \\ x^2 &\leq x^2 + y^2 \\ |x| &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\sqrt{\cdot} \uparrow \uparrow \text{ sur } \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

Donc : $|f(x, y)| \leq \underbrace{\|(x, y)\|_2}_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \xrightarrow{\quad} 0$

Par théorème d'encadrement,
 $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = f(0, 0)$

Donc : f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$

Q2) $\longrightarrow$ Sur $\mathbb{R}$

①

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$ tel que $b \neq 0$

$f(\cdot, b): x \mapsto \frac{xb}{\sqrt{x^2 + b^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ existe et vaut :

$$\begin{aligned} f(\cdot, b)'(a) &= \frac{b\sqrt{a^2 + b^2} - ab \left(\frac{2a}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \right)}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a^2 b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

②

②

Par symétrie de a et b avec $a \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ existe et vaut

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{ab^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

③

→ Si $b = 0$ et $a \neq 0$

$f(., 0): x \mapsto 0$ est dérivable donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ existe

et vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$

→ Si $b \neq 0$ et $a = 0$

Par symétrie des rôles de a et b , $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ existe et

vaut 0.

Donc: $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a^2 b}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{ab^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

→ $\mathbb{R}^n(0, 0)$.

Soit $t > 0$

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Donc: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0

$$\frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Donc: $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et vaut 0

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$

Q3)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, b) \longmapsto \begin{cases} \frac{b^3}{(a^2 + b^2)^{3/2}} & \text{si } (a, b) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (a, b) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \frac{1}{n}) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

Donc: f est non C^1 .

Ex 8

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien

$u: E \rightarrow E$ endomorphisme

$a \in E$

$$f \mid E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle u(x), x \rangle$$

u est un endomorphisme donc linéaire.

Donc u est différentiable sur E et

$$du \mid E \longrightarrow \mathcal{L}(E, E) \\ x \longmapsto u$$

En particulier en a :

$$du(a) = u$$

$$\text{id} \mid E \longrightarrow E \quad \text{est linéaire donc de même:} \\ x \longmapsto x$$

$$d \text{id}(x) = \text{id} \quad \text{pour tout } x \in E$$

On observe que pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \langle u(x), \text{id}(x) \rangle \text{ et } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est bilinéaire.}$$

Donc f est différentiable sur E et donc en a

Ainsi en a : $\forall h \in E$

$$\begin{aligned}
 df(a) \cdot h &= \langle du(a) \cdot h, id(a) \rangle + \langle u(a), d id(a) \cdot h \rangle \\
 &= \langle u(h), a \rangle + \langle u(a), h \rangle
 \end{aligned}$$

Anderer methode: Sei $(x, h) \in \delta^2$

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= \langle u(x+h), x+h \rangle \\
 &= \langle u(x) + u(h), x+h \rangle \\
 &= \langle u(x), x \rangle \\
 &\quad + \underbrace{\langle u(x), h \rangle + \langle u(h), x \rangle}_{\text{linear in } h} \\
 &\quad + \langle u(h), h \rangle \quad (*)
 \end{aligned}$$

$$(*) \quad \frac{|\langle u(h), h \rangle|}{\|h\|} \leq \frac{\|u(h)\| \|h\|}{\|h\|}$$

$$= \|u(h)\|$$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
 can u est 0

④

CCMP n°57

Q1) a) $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$

↳ peu importe la norme car elles sont toutes équivalentes.

$$f \in \mathcal{C}^0_{\text{a}}(0,0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \|(x,y)\| \leq \alpha \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leq \varepsilon$$

$$b) f \text{ diff' a } (0,0) \Leftrightarrow \exists \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ tel que} \\ f(h) \underset{h \rightarrow (0,0)}{=} f(0,0) + \mathcal{L}(h) + o(h)$$

Q2) a)

$$\bullet (x,y) \mapsto xy \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \Omega \quad (\text{poly})$$

$$(x,y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ également sur } \Omega \quad (\text{rationnelle})$$

$$\text{Ainsi, } f \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\bullet \text{ En } (0,0): \text{ Soit } (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{tel que } (x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0)$$

$$\text{Alors } |f(x_n, y_n) - f(0,0)| = |x_n y_n| \frac{|x_n^2 - y_n^2|}{x_n^2 + y_n^2}$$

$$\leq \frac{1}{2} (x_n^2 + y_n^2) \frac{|x_n^2 - y_n^2|}{x_n^2 + y_n^2}$$

$$(\text{car } (x_n - y_n)^2 \geq 0)$$

$$|f(x_n, y_n) - f(0, 0)| \leq \frac{1}{2} |x_n^2 - y_n^2|$$

$n \rightarrow +\infty \rightarrow 0$

Le théorème d'encadrement et de caractérisation séquentielle de la $\mathcal{C}^0$ permettent de conclure.

b) . Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Posons } f(a, b): x \mapsto f(x, b) = \frac{xb(x^2 - b^2)}{x^2 + b^2}$$

dérivable sur un voisinage de a .

$$a > 0 \quad \exists \frac{a}{2}, \frac{3a}{2} [x \setminus \{b\}] \subset \mathbb{R}$$

$$a < 0 \quad \exists \frac{3a}{2}, \frac{a}{2} [x \setminus \{b\}] \subset \mathbb{R}$$

Dérivable en a car est une f^0 rationnelle et

$$f(., b)'(a) = b \frac{(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{ba [2a(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)2a]}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$= \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{ba [2a(2b^2)]}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$= \frac{b(a^4 + 4a^2b^2 - b^4)}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$$

6

De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe sur U et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{-a(b^4 - a^4 + 4a^2b^2)}{a^2 + b^2}$$

(car $\forall (x,y) \in U, f(x,y) = f(y,z)$)

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U ,

donc par critère C^1 , f est C^1 sur U .

Soit $t > 0$

$$\frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} \geq 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0

Ainsi	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$	
		$(a,b) \mapsto \begin{cases} \frac{b(a^4 - b^4 + 4a^2b^2)}{(a^2 + b^2)^2} & \text{si } (a,b) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (a,b) = (0,0) \end{cases}$	

$$\frac{\partial f}{\partial y} \mid \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a,b) \mapsto \begin{cases} \frac{-a(b^4 - a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2)}{(a^2 + b^2)^2} & \text{si } (a,b) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (a,b) = (0,0) \end{cases}$$

• Soit f^0 sur $\mathbb{R}$

• En $(0,0)$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| = \left| \frac{b(a^4 - b^4 + \frac{1}{2}a^2b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \right|$$

$$\leq \frac{|b|(a^4 + b^4 + \frac{1}{2}a^2b^2)}{\|(a,b)\|_2^4}$$

$$\frac{|b|}{|a|} \leq \|(a,b)\|_2$$

$$\leq \frac{6 \|(a,b)\|_2^4}{\|(a,b)\|_2^3} = 6 \|(a,b)\|_2$$

$(f^0 \text{ de } \|u\|_2, 1-\text{lip})$

On conclut avec le théorème d'encadrement

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ } f^0 \text{ en } (0,0).$$

⑥

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$

D'après le critère $\mathcal{C}^2$, f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 6.

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (\underbrace{x+y+z}_{f_1(x, y, z)}, \underbrace{xyz}_{f_2(x, y, z)})$$

Q1 f_1, f_2 sont diff sur $\mathbb{R}^3$ car elles sont polynomiales.

$$J_{(a,b,c)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b,c) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a,b,c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(J_{(a,b,c)}(f)) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bc & ac-bc & ab-bc \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e_2 &\leftarrow e_2 - e_1 \\ e_3 &\leftarrow e_3 - e_1 \end{aligned}$$

$$\operatorname{rg}(\mathcal{T}_{(a,b,c)}(f)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bc = 0 \\ ab - bc = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ac = ab = bc$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{à prouver} \\ \text{ou } a = b = 0 \\ \text{ou } a = c = 0 \\ \text{ou } b = c = 0 \\ \text{ou } a = b = c \end{cases}$$