

Un corrigé du devoir surveillé n°6 — piste verte

d'après Laurent Carrot (1), Bruno Winckler (3), DB (2,4)

1. Les urnes de Pólya (CCINP-PC-2021)	1
1.1. Préliminaires	1
1.2. La loi de X_n	2
1.3. La loi de S_n dans un cas particulier	3
2. Extrema locaux et généralisation du théorème de Rolle	6
3. Autour du théorème de Darboux (CCINP-MP-2025)	8
4. Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$	10

1. Les urnes de Pólya (CCINP-PC-2021)

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.

On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n -ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n -ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n -ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n -ième tirage est rouge.

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $S_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k.$$

1.1. Préliminaires

Q1 Déterminer la loi de X_1 .

Notons, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, R_i (resp. B_i) l'événement « tirer une boule rouge (resp. blanche) au i -ème tirage. »
On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(B_1) = \frac{b}{b+r} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_1 = 0) = \mathbf{P}(R_1) = \frac{r}{b+r}.$$

car toutes les $b + r$ boules présentes dans l'urne sont indiscernables (elles ont donc toutes la même probabilité d'être tirées).

Q2 Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2 .

Sachant $(X_1 = 1)$, on a tiré une boule blanche au premier tirage, donc, avant le second tirage, l'urne contient $b + 1$ boules blanches et r boules rouges indiscernables, donc :

$$\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \mathbf{P}_{(X_1=1)}(B_2) = \frac{b+1}{r+b+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \mathbf{P}_{(X_1=1)}(R_2) = \frac{r}{r+b+1}.$$

De même, sachant $(X_1 = 0)$, on a b boules blanches et $r + 1$ boules rouges indiscernables pour le deuxième tirage,

donc :

$$\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \mathbf{P}_{(X_1=0)}(B_2) = \frac{b}{r+b+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \mathbf{P}_{(X_1=0)}(R_2) = \frac{r+1}{r+b+1}.$$

On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = 0, X_1 = 1)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_2 = 0) &= \mathbf{P}(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = 0) \times \mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 1) \times \mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 0) \\ &= \frac{r}{b+r} \times \frac{r+1}{b+r+1} + \frac{b}{b+r} \times \frac{r}{b+r+1} \\ &= \frac{r}{b+r} \end{aligned}$$

et :

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_2 = 0) = \frac{b}{b+r}.$$

Q3 Soit $n \in \mathbf{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

$S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k$ est égale au nombre de boules présentes dans l'urne au départ auquel on ajoute le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages.

Sachant que chaque fois que l'on tire une boule blanche, on en ajoute globalement une dans l'urne, S_n est égale au nombre de boules blanches présentes initialement auquel on ajoute le nombre de boules blanches ajoutées au cours des n premiers tirages.

S_n représente donc le nombre de boules blanches présentes dans l'urne avant le $(n+1)$ -ième tirage.

Comme, à chaque tirage, il y a au moins 1 boule blanche et une boule rouge dans l'urne, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$.

D'où, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, donc $S_n(\Omega) = \llbracket b, b+n \rrbracket$.

Cette formule est encore valable pour $n = 0$ (car $S_0 = b$), donc est valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1.2. La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

Q4 Pour tout $k \in \llbracket b, n+b \rrbracket$, calculer $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.

Soit $k \in \llbracket b, n+b \rrbracket$.

Sachant $(S_n = k)$, l'urne contient au début du $(n+1)$ -ème tirage k boules blanches.

Comme, à chaque tirage, on ajoute exactement une boule (que la boule tirée soit blanche ou rouge), l'urne contient en tout, avant le $(n+1)$ -ème tirage, $r+b+n$ boules, donc $r+b+n-k$ boules rouges.

D'où, comme toutes les boules présentes dans l'urne sont indiscernables :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = k) = \mathbf{P}_{(S_n=k)}(B_{n+1}) = \frac{k}{r+b+n}$$

Q5 Justifier que :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathbf{E}(S_n)}{b+r+n}.$$

De plus, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = k)_{k \in S_n(\Omega)} = (S_n = k)_{k \in \llbracket b, b+n \rrbracket}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=b}^{b+n} \mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \cap S_n = k) \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} \mathbf{P}(S_n = k) \times \mathbf{P}_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1) \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} \mathbf{P}(S_n = k) \times \frac{k}{r+b+n} \\ &= \frac{1}{r+b+n} \sum_{k=b}^{b+n} k \mathbf{P}(S_n = k) \\ &= \frac{\mathbf{E}(S_n)}{r+b+n}. \end{aligned}$$

Q6 Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Montrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, « X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ » (HR_n).

- *Initialisation.* — Pour $n = 1$, d'après la question **Q1**, on a $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{r+b}\right)$, donc on a bien HR_1 .
- *Hérédité.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Alors on a $\mathbf{E}(X_k) = \frac{b}{b+r}$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(S_n) = b + \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) = b + n \frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}.$$

D'où, d'après la question précédente :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathbf{E}(S_n)}{r+b+n} = \frac{b(b+r+n)}{b+r} \times \frac{1}{r+b+n} = \frac{b}{b+r}$$

et, comme $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, on a $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$. On a bien HR_{n+1} .

- *Conclusion.* — D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

1.3. La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

Q7 Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a ici $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n X_k$, donc, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} S_n(\omega) = 1 &\Leftrightarrow 1 + \sum_{k=1}^n X_k(\omega) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n X_k(\omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad X_k(\omega) = 0 \end{aligned}$$

car toutes les variables X_k sont positives, et une somme de positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nul. Ainsi :

$$(S_n = 1) = \bigcap_{k=1}^n (X_k = 0).$$

Q8 Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} P(S_n = 1) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = 0)\right) \\ &= P(X_1 = 0) \times P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) \times \cdots \times P_{(X_1=0) \cap \dots \cap (X_{n-1}=0)}(X_n = 0) \quad (\text{formule des probabilités composées}) \\ &= P(X_1 = 0) \times \prod_{k=1}^{n-1} P_{X_1=0 \cap \dots \cap X_k=0}(X_{k+1} = 0) \\ &= \frac{1}{2} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{n+1} \quad (\text{télescopage}) \end{aligned}$$

car, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, sachant $(X_1 = 0) \cap \dots \cap (X_k = 0)$, on a tiré k boules rouges, donc ajouté k boules rouges, et l'urne contient donc $k+1$ rouges et 1 blanche équiprobables au début du $k+1$ -ème tirage.

$(S_n = n+1)$ signifie que l'on a tiré que des boules blanches.

Dans cette partie, les blanches et les rouges ont des rôles complètement symétriques (même nombre au départ et même comportement à chaque tirage), donc, par symétrie (ou en inversant le rôle des blanches et des rouges), on a bien $P(S_{n+1} = n) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

Q9 Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

- (i) $\ell \notin \{k-1, k\}$;
- (ii) $\ell = k-1$;
- (iii) $\ell = k$.

Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

- (i) Si $\ell \notin \{k-1, k\}$, alors, comme $(S_{n+1} - S_n)(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, l'événement $((S_{n+1} = k) \cap (S_n = \ell))$ est impossible (car il implique $S_{n+1} - S_n = k - \ell \notin \{0, 1\}$), donc :

$$P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) = \frac{P(S_{n+1} = k) \cap (S_n = \ell)}{P(S_n = \ell)} = \frac{0}{P(S_n = \ell)} = 0.$$

(ii) Si $\ell = k - 1$ (et donc $k \geq 2$), alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(S_{n+1} = k | S_n = \ell) &= \frac{\mathbf{P}((S_{n+1} = k) \cap (S_n = k - 1))}{\mathbf{P}(S_n = k - 1)} \\
 &= \frac{\mathbf{P}((S_{n+1} - S_n = 1) \cap (S_n = k - 1))}{\mathbf{P}(S_n = k - 1)} \\
 &= \frac{\mathbf{P}((X_{n+1} = 1) \cap (S_n = k - 1))}{\mathbf{P}(S_n = k - 1)} \\
 &= \frac{\mathbf{P}(S_n = k - 1) \times \mathbf{P}_{(S_n = k - 1)}(X_{n+1} = 1)}{\mathbf{P}(S_n = k - 1)} \quad (\text{formule des probabilités composées}) \\
 &= \mathbf{P}_{(S_n = k - 1)}(X_{n+1} = 1) \\
 &= \frac{k - 1}{2 + n} \quad (\text{d'après la question Q4 avec } k - 1 \in \mathbf{N}^* \text{ et } r = b = 1).
 \end{aligned}$$

(iii) Enfin, si $\ell = k$, on a de même :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(S_{n+1} = k | S_n = \ell) &= \frac{\mathbf{P}((S_{n+1} = k) \cap (S_n = k))}{\mathbf{P}(S_n = k)} \\
 &= \frac{\mathbf{P}((S_{n+1} - S_n = 0) \cap (S_n = k))}{\mathbf{P}(S_n = k)} \\
 &= \frac{\mathbf{P}((X_{n+1} = 0) \cap (S_n = k))}{\mathbf{P}(S_n = k)} \\
 &= \frac{\mathbf{P}(S_n = k) \times \mathbf{P}_{(S_n = k)}(X_{n+1} = 0)}{\mathbf{P}(S_n = k)} \quad (\text{formule des probabilités composées}) \\
 &= \mathbf{P}_{(S_n = k)}(X_{n+1} = 0) \\
 &= 1 - \mathbf{P}_{(S_n = k)}(X_{n+1} = 1) \\
 &= \frac{2 + n - k}{2 + n} \quad (\text{d'après la question Q4 avec } k \in \mathbf{N}^* \text{ et } r = b = 1)
 \end{aligned}$$

Q10 Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$, on a la relation :

$$\mathbf{P}(S_{n+1} = k) = \frac{k - 1}{n + 2} \times \mathbf{P}(S_n = k - 1) + \frac{n + 2 - k}{n + 2} \times \mathbf{P}(S_n = k).$$

Soit $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = \ell)_{\ell \in S_n(\Omega)} = (S_n = \ell)_{\ell \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \mathbf{P}((S_{n+1} = k) \cap (S_n = \ell)) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \mathbf{P}(S_n = \ell) \times \mathbf{P}_{(S_n=\ell)}(S_{n+1} = k) \\
&= \mathbf{P}(S_n = k-1) \times \mathbf{P}_{(S_n=k-1)}(S_{n+1} = k) + \mathbf{P}(S_n = k) \times \mathbf{P}_{(S_n=k)}(S_{n+1} = k) \\
&\quad + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin \{k-1, k\}}}^{n+1} \mathbf{P}(S_n = \ell) \times \underbrace{\mathbf{P}_{(S_n=\ell)}(S_{n+1} = k)}_{=0} \quad (\text{car, comme } k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, k-1 \text{ et } k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket) \\
&= \frac{k-1}{n+2} \times \mathbf{P}(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} \times \mathbf{P}(S_n = k).
\end{aligned}$$

Q11 Démontrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, « S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ » (HR_n).

- *Initialisation.* — Pour $n = 0$, $S_0 = 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 1 \rrbracket)$, donc on a bien HR_0 .
Pour $n = 1$, on a $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2) = \mathcal{U}(\llbracket 0, 1 \rrbracket)$ d'après la question **Q1** avec $r = b = 1$.
On a donc $S_1 = 1 + X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)$. On a bien HR_1 .
- *Hérédité.* — Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et supposons HR_n vérifiée. Alors on a $S_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1, n+2 \rrbracket$ (d'après la question **Q3**), $\mathbf{P}(S_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+2}$ (d'après la question **Q8**), $\mathbf{P}(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$ (admis dans l'énoncé) et, pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2} \times \mathbf{P}(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} \times \mathbf{P}(S_n = k) \\
&= \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \quad (\text{d'après } HR_n \text{ avec } k-1 \text{ et } k \in S_n(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket) \\
&= \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $S_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+2 \rrbracket)$, i.e. HR_{n+1} .

- *Conclusion.* — D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$.

2. Extrema locaux et généralisation du théorème de Rolle

Soit I un ouvert de $\mathbf{R}$ contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que f atteint un extremum local en 0 et que f est dérivable en 0.

Q12 Démontrer que $f'(0) = 0$.

Supposons, sans perte de généralité, que f atteigne un minimum local au point 0.
Soulignons que, comme 0 appartient à l'ouvert I :

$$I \cap]0, +\infty[\neq \emptyset \quad \text{et} \quad I \cap]-\infty, 0[\neq \emptyset.$$

Nous allons étudier les limites à droites et à gauches du taux d'accroissement de f en 0, qui sont bien définies d'après ce que nous avons souligné ci-avant.

- Pour tout $x \in I \cap]0, +\infty[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq 0$ et donc, par passage à la limite :

$$f'(0) = f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq 0.$$

- Pour tout $x \in I \cap]-\infty, 0[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 0$ et donc, par passage à la limite :

$$f'(0) = f'_g(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 0.$$

De $0 \leq f'(0) \leq 0$, nous déduisons $f'(0) = 0$.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue. On suppose que f atteint un extremum local en un point $x_0 \in \Omega$ et que f est différentiable en x_0 . On souhaite démontrer qu'alors $df(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})}$.

Soit h un vecteur non nul de E .

Q13 Démontrer que l'application de la variable réelle t :

$$\varphi : t \longmapsto f(x_0 + th)$$

est définie sur un ouvert de $\mathbf{R}$ qui contient 0.

L'application :

$$a \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & x_0 + th \end{array} \right.$$

est $\|h\|$ -lipschitzienne donc continue.

L'ensemble $I := a^{-1}(\Omega)$ est donc un ouvert de $\mathbf{R}$, comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Comme $a(0) = x_0 \in \Omega$, $0 \in I$.

Q14 Démontrer que la dérivée directionnelle $D_h f(x_0)$ est nulle.

La fonction f étant différentiable en x_0 , elle possède des dérivées suivant toutes les direction en ce point, en particulier suivant la direction h .

Ainsi le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

possède-t-il une limite dans $\mathbf{R}$ lorsque le réel t tend vers 0.

Nous en déduisons que la fonction :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(x_0 + th) \end{array} \right.$$

est dérivable en 0 et nous remarquons que, par définition :

$$\varphi'(t_0) =: D_h f(x_0).$$

Comme la fonction f atteint un extremum local en x_0 , la fonction φ atteint un extremum local en 0.

Comme φ est dérivable en ce point 0, qui appartient à son ouvert de définition I (**Q13**), la question **Q12** livre :

$$D_h f(x_0) := \varphi'(t_0) = 0.$$

Q15 Conclure.

D'après Q14 :

$$\forall h \in E \setminus \{0_E\} \quad df(x_0) \cdot h = D_h f(x_0) = 0.$$

La forme linéaire $df(x_0)$ s'annulant aussi en 0_E , nous en déduisons qu'elle est identiquement nulle sur E .

Soient $a \in E$, $r > 0$ et $g : \overline{B(a, r)} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. On suppose que :

- (i) l'application g est continue sur la boule fermée $\overline{B(a, r)}$;
- (ii) l'application g est différentiable sur la boule ouverte $B(a, r)$;
- (iii) l'application g est constante sur la sphère $S(a, r)$.

Q16 Démontrer qu'il existe $x_0 \in B(a, r)$ telle que $dg(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})}$.

La boule $\overline{B(a, r)}$ est fermée et bornée dans le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E , qui est de dimension finie. Elle est donc compacte.

La fonction g étant continue sur le compact $\overline{B(a, r)}$, le théorème des bornes atteintes nous livre :

$$\exists (x_m, x_M) \in \overline{B(a, r)}^2 \quad \forall x \in \overline{B(a, r)} \quad g(x_m) \leq g(x) \leq g(x_M).$$

- Si x_m et x_M sont sur la sphère $S(a, r)$, alors leurs valeurs par f sont égales d'après (iii).
Dans ce cas, la fonction f est constante sur $\overline{B(a, r)}$ et donc $dg(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})}$, en tout point x_0 de la boule ouverte $B(a, r)$.
- Sinon, l'un des points x_m, x_M n'est pas sur la sphère.
Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit de x_m .
Alors la fonction g atteint un extremum local (et même global) au point x_m appartenant à l'ouvert $B(a, r)$, sur lequel elle est différentiable.
D'après Q15, $dg(x_m) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})}$.

3. Autour du théorème de Darboux (CCINP-MP-2025)

Soit $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Q17 Justifier que $f'([-1, 1[)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$.

On note que $] -1, 1[$ est un intervalle, donc une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}$.

Comme une application continue préserve la connexité par arcs, et que f' est continue en tant que dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on conclut que $f'([-1, 1[)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$.

On considère l'application $f :] -1, 1[\longrightarrow \mathbf{R}^2$ définie par, pour tout $t \in] -1, 1[$:

$$f(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } t \in] -1, 0] \\ \left(t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right) & \text{si } t \in] 0, 1[. \end{cases}$$

On note pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Q18 Démontrer que f est dérivable en 0 puis sur l'intervalle $] -1, 1[$. Préciser le vecteur $f'(t)$ pour tout $t \in] -1, 0]$ et pour tout $t \in] 0, 1[$.

La dérivabilité de f sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ ne pose pas de problème grâce aux théorèmes généraux sur les fonctions dérivables.

En effet, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est dérivable sur $]0, 1[$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, et le cosinus et le sinus sont dérivables sur $\mathbf{R}$.

Par composition, $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et $t \mapsto \cos\left(\frac{1}{t}\right)$, or $t \mapsto t^2$ l'est aussi.

Par produit, chaque composante de f est dérivable sur $]0, 1[$ donc f l'est aussi.

Le raisonnement est plus direct sur $] -1, 0[$ puisque la restriction de f y est identiquement nulle.

On a en outre, pour tout $t \in]0, 1[$:

$$f'(t) = \left(2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right), 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right).$$

Pour $t \in] -1, 0[$, la dérivée est bien sûr nulle.

Démontrons la dérivabilité en 0 composante par composante.

Soit t strictement positif au voisinage de 0.

On a :

$$\frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t - 0} = t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1)$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t - 0} = 0.$$

$$\text{On trouve de même } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t - 0} = 0.$$

La limite à gauche étant trivialement nulle aussi, on a démontré :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t) - f(0)) = (0, 0)$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = (0, 0)$.

Ainsi f est dérivable sur $] -1, 1[$.

Q19 Démontrer que :

$$\forall t \in]0, 1[\quad \|f'(t)\|_2 \geq 1$$

et en déduire que $f'([-1, 1[)$ n'est pas une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$.

Soit $t \in]0, 1[$.

On a :

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|_2^2 &= \left(2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2 + \left(2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2 \\ &= \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + (2t)^2 \left(\cos^2\left(\frac{1}{t}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) \right) \\ &= 1 + (2t)^2 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

donc $f'([0, 1[) \subseteq \mathbf{R}^2 \setminus B(0, 1)$.

Déduisons-en que $f'([-1, 1[)$ n'est pas connexe par arcs en raisonnant par l'absurde.

Supposons l'existence d'un chemin continu $\gamma : [0, 1] \longrightarrow f'([-1, 1[)$ liant $f'(0) = (0, 0)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Par continuité de $\|\gamma\|_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ (toute norme est continue car lipschitzienne par l'inégalité triangulaire renversée) et le théorème des valeurs intermédiaires, avec $\|\gamma(0)\|_2 = \|(0, 0)\|_2 = 0$ et $\|\gamma(1)\|_2 = \left\| f'\left(\frac{1}{2}\right) \right\|_2 \geq 1$,

il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\|\gamma(t_0)\|_2 = 1/2$.

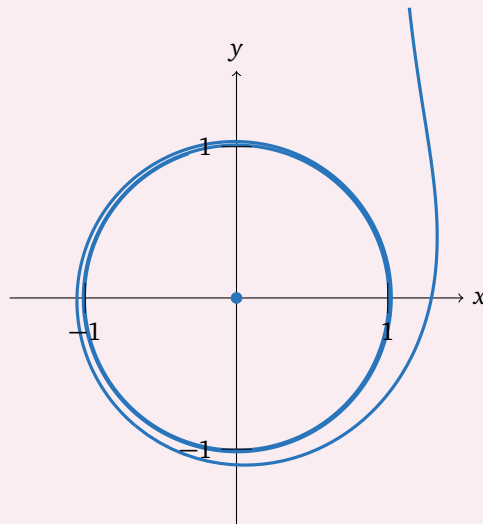
Or $\|\gamma(t_0)\|_2$ appartient à $\|f'\|_2([-1, 1[)$, qui lui-même est inclus dans $\{0\} \cup [1, +\infty[$ d'après l'étude qui précède.

Il ne peut donc pas être égal à $1/2$.

contradiction.

Par l'absurde, $f'([-1, 1[)$ n'est pas connexe par arcs.

Remarque. — Représentons $\{(0, 0)\} = f'([-1, 0[)$ et $f'([0, 1[)$.



Il est manifeste que $\{(0,0)\} = f'([-1,0])$ et $f'([0,1])$ forment deux composantes connexes distinctes : on ne peut pas passer continûment d'un vecteur « presque unitaire » au vecteur nul sans passer par toutes les normes intermédiaires. C'est ce que nous avons formalisé ci-dessus.

4. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ distinct de $\{0\}$.

Q20 Justifier que :

$$\alpha := \inf \{g \in G : g > 0\}$$

est bien défini.

Le sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ possède, par hypothèse, un élément non nul g_0 .
 Si $g_0 > 0$, alors $g_0 \in \{g \in G : g > 0\}$.
 Sinon, $-g_0 \in \{g \in G : g > 0\}$.
 La partie $\{g \in G : g > 0\}$ est dans tous les cas non vide.
 Comme elle est de plus minorée (par 0), elle possède une borne inférieure.

Q21 On suppose que $\alpha > 0$. Démontrer que :

$$G = \alpha\mathbb{Z} := \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}.$$

On pourra commencer par établir que $\alpha \in G$, en raisonnant par l'absurde et en considérant l'intervalle $] \alpha, 2\alpha[$.

- Démontrons tout d'abord que $\alpha \in G$, en raisonnant par l'absurde.
 Supposons donc $\alpha \notin G$.
 Comme $\alpha := \inf \{g \in G : g > 0\} > 0$ et $2\alpha > \alpha$, 2α est pas un minorant de $\{g \in G : g > 0\}$.
 Il existe donc $g_1 \in G$ tel que :

$$\alpha \leq g_1 < 2\alpha.$$

Comme $\alpha \notin G$, on a même :

$$\alpha < g_1 < 2\alpha.$$

Puisque $g_1 > \alpha$, g_1 n'est pas un minorant de $\{g \in G : g > 0\}$.

Il existe donc $g_2 \in G$ tel que :

$$\alpha \leq g_2 < g_1 < 2\alpha.$$

Nous en déduisons que l'élément $g_1 - g_2$ de G (stable par somme tordue) appartient à l'intervalle $]0, \alpha[$, ce qui est contradictoire avec la définition de α .

Ainsi $\alpha \in G$.

- Par minimalité d'un sous-groupe engendré, nous obtenons :

$$\alpha\mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle \subset G.$$

- Il nous reste à établir l'inclusion réciproque.

Soit $g \in G$.

Par division de g par $\alpha > 0$:

$$\exists ! (q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, \alpha[\quad g = q\alpha + r.$$

Si $r > 0$, alors :

$$0 < r = \underbrace{g - q\alpha}_{\in G} < \alpha$$

qui va à l'encontre de la définition de α .

Ainsi, $r = 0$ et $g = q\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$.

Q22 On suppose que $\alpha = 0$. Démontrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, nous disposons d'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de l'ensemble $\{g \in G : g > 0\}$ qui converge vers 0.

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.

Démontrons qu'il existe un élément du groupe G entre a et b .

En appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = (b - a)/2 > 0$, nous obtenons un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad 0 < g_n < b - a$$

et donc, en particulier :

$$0 < g_N < b - a.$$

Par division de a par $g_N > 0$:

$$\exists ! (q, r) \in \mathbb{Z} \times [0, g_N[\quad a = qg_N + r.$$

Nous en déduisons que :

$$a = qg_N + r < qg_N + g_N \leq qg_N + r + g_N = a + g_N < a + b - a = b.$$

Ainsi $qg_N + g_N \in G \cap]a, b[$.

Nous avons donc établi qu'un sous-groupe additif non trivial de $\mathbb{R}$ est :

- (i) soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$;
- (ii) soit dense dans $\mathbb{R}$.

Q23 Calculer l'adhérence de $A := \{\cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble A étant inclus dans le fermé $[-1, 1]$, il vient :

$$\bar{A} \subset [-1, 1].$$

Nous allons établir l'inclusion réciproque, en utilisant l'alternative des sous-groupes non triviaux de $(\mathbb{R}, +)$ précédemment établie et rappelée avant cette question.

Comme la fonction $\cos$ est paire et 2π -périodique, A est l'image du sous-groupe non trivial $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{R}, +)$ par la fonction $\cos$, i.e. :

$$A = \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}).$$

S'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}.$$

alors 2 et 2π peuvent s'écrire :

$$2 = q\alpha \quad \text{et} \quad 2\pi = p\alpha$$

avec p, q des entiers relatifs non nuls, d'où :

$$\pi = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$$

ce qui n'est pas.

Par suite $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe deux suites d'entiers relatifs $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que :

$$a_n + 2b_n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \arccos(x) .$$

Par continuité, parité et 2π -périodicité de $\cos$:

$$\underbrace{\cos(a_n)}_{\in A} = \cos(a_n + 2b_n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(\arccos(x)) = x$$

d'où $x \in \overline{A}$.

De notre étude, nous déduisons que :

$$\overline{\{\cos(n) : n \in \mathbf{N}\}} = [-1, 1] .$$