

Devoir surveillé n°6 — piste verte

samedi 17 janvier de 8h00 à 12h00

1. Les urnes de Pólya (CCINP-PC-2021)	1
1.1. Préliminaires	1
1.2. La loi de X_n	1
1.3. La loi de S_n dans un cas particulier	2
2. Extrema locaux et généralisation du théorème de Rolle	2
3. Autour du théorème de Darboux (CCINP-MP-2025)	3
4. Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$	3

1. Les urnes de Pólya (CCINP-PC-2021)

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher.

On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n -ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n -ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n -ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n -ième tirage est rouge.

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $S_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k .$$

1.1. Préliminaires

Q1 Déterminer la loi de X_1 .

Q2 Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2 .

Q3 Soit $n \in \mathbf{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

1.2. La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

Q4 Pour tout $k \in \llbracket b, n+b \rrbracket$, calculer $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.

Q5 Justifier que :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathbf{E}(S_n)}{b + r + n} .$$

Q6 Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1.3. La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

Q7 Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q8 Montrer que $\mathbf{P}(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $\mathbf{P}(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

Q9 Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

- (i) $\ell \notin \{k-1, k\}$;
- (ii) $\ell = k-1$;
- (iii) $\ell = k$.

Q10 Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, on a la relation :

$$\mathbf{P}(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} \times \mathbf{P}(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} \times \mathbf{P}(S_n = k) .$$

Q11 Démontrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

2. Extrema locaux et généralisation du théorème de Rolle

Soit I un ouvert de $\mathbf{R}$ contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que f atteint un extremum local en 0 et que f est dérivable en 0.

Q12 Démontrer que $f'(0) = 0$.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue. On suppose que f atteint un extremum local en un point $x_0 \in \Omega$ et que f est différentiable en x_0 . On souhaite démontrer qu'alors $df(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})}$.

Soit h un vecteur non nul de E .

Q13 Démontrer que l'application de la variable réelle t :

$$\varphi : t \longmapsto f(x_0 + t h)$$

est définie sur un ouvert de $\mathbf{R}$ qui contient 0.

Q14 Démontrer que la dérivée directionnelle $D_h f(x_0)$ est nulle.

Q15 Conclure.

Soient $a \in E$, $r > 0$ et $g : \overline{B(a, r)} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application. On suppose que :

- (i) l'application g est continue sur la boule fermée $\overline{B(a, r)}$;
- (ii) l'application g est différentiable sur la boule ouverte $B(a, r)$;
- (iii) l'application g est constante sur la sphère $S(a, r)$.

Q16 Démontrer qu'il existe $x_0 \in B(a, r)$ telle que $dg(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})}$.

3. Autour du théorème de Darboux (CCINP-MP-2025)

Soit $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Q17 Justifier que $f'([-1, 1[)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$.

On considère l'application $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R}^2$ définie par, pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$f(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } t \in]-1, 0] \\ \left(t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right) & \text{si } t \in]0, 1[. \end{cases}$$

On note pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Q18 Démontrer que f est dérivable en 0 puis sur l'intervalle $] -1, 1[$. Préciser le vecteur $f'(t)$ pour tout $t \in]-1, 0]$ et pour tout $t \in]0, 1[$.

Q19 Démontrer que :

$$\forall t \in]0, 1[\quad \|f'(t)\|_2 \geq 1$$

et en déduire que $f'([-1, 1[)$ n'est pas une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$.

4. Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ distinct de $\{0\}$.

Q20 Justifier que :

$$\alpha := \inf \{g \in G : g > 0\}$$

est bien défini.

Q21 On suppose que $\alpha > 0$. Démontrer que :

$$G = \alpha\mathbf{Z} := \{n\alpha : n \in \mathbf{Z}\} .$$

On pourra commencer par établir que $\alpha \in G$, en raisonnant par l'absurde et en considérant l'intervalle $] \alpha, 2\alpha[$.

Q22 On suppose que $\alpha = 0$. Démontrer que G est dense dans $\mathbf{R}$.

Nous avons donc établi qu'un sous-groupe additif non trivial de $\mathbf{R}$ est :

- (i) soit de la forme $\alpha\mathbf{Z}$, où $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$;
- (ii) soit dense dans $\mathbf{R}$.

Q23 Calculer l'adhérence de $A := \{\cos(n) : n \in \mathbf{N}\}$ dans $\mathbf{R}$.