

Devoir surveillé n°6 — piste rouge

samedi 17 janvier de 8h00 à 12h00

1. Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$	1
2. Une version faible du théorème d'inversion locale (X-ÉNS-2024-MPI-MP)	3
3. Convergence d'une suite de probabilités et arithmétique (X-ÉNS-2022-MPI-MP)	7
3.1. Convergence d'une suite de mesures de probabilités	7
3.2. Une version probabiliste du théorème fondamental de l'arithmétique	11

1. Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ distinct de $\{0\}$.

Q1 Justifier que :

$$\alpha := \inf \{g \in G : g > 0\}$$

est bien défini.

Le sous-groupe G de $(\mathbf{R}, +)$ possède, par hypothèse, un élément non nul g_0 .
 Si $g_0 > 0$, alors $g_0 \in \{g \in G : g > 0\}$.
 Sinon, $-g_0 \in \{g \in G : g > 0\}$.
 La partie $\{g \in G : g > 0\}$ est dans tous les cas non vide.
 Comme elle est de plus minorée (par 0), elle possède une borne inférieure.

Q2 On suppose que $\alpha > 0$. Démontrer que :

$$G = \alpha\mathbf{Z} := \{n\alpha : n \in \mathbf{Z}\}.$$

On pourra commencer par établir que $\alpha \in G$, en raisonnant par l'absurde et en considérant l'intervalle $] \alpha, 2\alpha[$.

- Démontrons tout d'abord que $\alpha \in G$, en raisonnant par l'absurde.
 Supposons donc $\alpha \notin G$.
 Comme $\alpha := \inf \{g \in G : g > 0\} > 0$ et $2\alpha > \alpha$, 2α est pas un minorant de $\{g \in G : g > 0\}$.
 Il existe donc $g_1 \in G$ tel que :

$$\alpha \leq g_1 < 2\alpha.$$
 Comme $\alpha \notin G$, on a même :

$$\alpha < g_1 < 2\alpha.$$
 Puisque $g_1 > \alpha$, g_1 n'est pas un minorant de $\{g \in G : g > 0\}$.
 Il existe donc $g_2 \in G$ tel que :

$$\alpha \leq g_2 < g_1 < 2\alpha.$$
 Nous en déduisons que l'élément $g_1 - g_2$ de G (stable par somme tordue) appartient à l'intervalle $]0, \alpha[$, ce qui est contradictoire avec la définition de α .
 Ainsi $\alpha \in G$.
- Par minimalité d'un sous-groupe engendré, nous obtenons :

$$\alpha\mathbf{Z} = \langle \alpha \rangle \subset G.$$
- Il nous reste à établir l'inclusion réciproque.
 Soit $g \in G$.
 Par division de g par $\alpha > 0$:

$$\exists ! (q, r) \in \mathbf{Z} \times [0, \alpha[\quad g = q\alpha + r.$$
 Si $r > 0$, alors :

$$0 < r = \underbrace{g - q\alpha}_{\in G} < \alpha$$
 qui va à l'encontre de la définition de α .
 Ainsi, $r = 0$ et $g = q\alpha \in \alpha\mathbf{Z}$.

Q3 On suppose que $\alpha = 0$. Démontrer que G est dense dans $\mathbf{R}$.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, nous disposons d'une suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de l'ensemble $\{g \in G : g > 0\}$ qui converge vers 0.

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.

Démontrons qu'il existe un élément du groupe G entre a et b .

En appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = (b - a)/2 > 0$, nous obtenons un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad 0 < g_n < b - a$$

et donc, en particulier :

$$0 < g_N < b - a.$$

Par division de a par $g_N > 0$:

$$\exists ! (q, r) \in \mathbf{Z} \times [0, g_N[\quad a = qg_N + r.$$

Nous en déduisons que :

$$a = qg_N + r < qg_N + g_N \leq qg_N + r + g_N = a + g_N < a + b - a = b.$$

Ainsi $qg_N + g_N \in G \cap]a, b[$.

Nous avons donc établi qu'un sous-groupe additif non trivial de $\mathbf{R}$ est :

- (i) soit de la forme $\alpha\mathbf{Z}$, où $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$;
- (ii) soit dense dans $\mathbf{R}$.

Q4 Calculer l'adhérence de $A := \{\cos(n) : n \in \mathbf{N}\}$ dans $\mathbf{R}$.

L'ensemble A étant inclus dans le fermé $[-1, 1]$, il vient :

$$\overline{A} \subset [-1, 1].$$

Nous allons établir l'inclusion réciproque, en utilisant l'alternative des sous-groupes non triviaux de $(\mathbf{R}, +)$ précédemment établie et rappelée avant cette question.

Comme la fonction $\cos$ est paire et 2π -périodique, A est l'image du sous-groupe non trivial $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ de $(\mathbf{R}, +)$ par la fonction $\cos$, i.e. :

$$A = \cos(\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}).$$

S'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z} = \alpha\mathbf{Z}.$$

alors 2 et 2π peuvent s'écrire :

$$2 = q\alpha \quad \text{et} \quad 2\pi = p\alpha$$

avec p, q des entiers relatifs non nuls, d'où :

$$\pi = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$$

ce qui n'est pas.

Par suite $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe deux suites d'entiers relatifs $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que :

$$a_n + 2b_n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \arccos(x).$$

Par continuité, parité et 2π -périodicité de $\cos$:

$$\underbrace{\cos(a_n)}_{\in A} = \cos(a_n + 2b_n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(\arccos(x)) = x$$

d'où $x \in \overline{A}$.

De notre étude, nous déduisons que :

$$\overline{\{\cos(n) : n \in \mathbf{N}\}} = [-1, 1].$$

2. Une version faible du théorème d'inversion locale (X-ÉNS-2024-MPI-MP)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$. Si g est un endomorphisme $\mathbf{R}$ -linéaire de E , on note $\|g\|$ sa norme d'opérateur, c'est-à-dire :

$$\|g\| = \sup\{\|g(v)\| : v \in E \text{ et } \|v\| \leq 1\}.$$

Q5 Soient V un ouvert convexe de E et h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans E . On suppose qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que, pour tout $x \in V$, $\|dh(x)\| \leq C$. Montrer que pour tous x_1 et x_2 dans V , on a $\|h(x_2) - h(x_1)\| \leq C \|x_2 - x_1\|$.

Soit γ l'application définie sur $[0, 1]$ par $t \mapsto x_1 + t(x_2 - x_1)$.

Son image est $[x_1, x_2]$ donc elle est à valeurs dans V (puisque V est convexe) et elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

On en déduit que $h \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, et on a :

$$h(x_2) - h(x_1) = \int_0^1 (h \circ \gamma)'(t) dt = \int_0^1 dh(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

donc par l'inégalité triangulaire :

$$\|h(x_2) - h(x_1)\| \leq \int_0^1 \|dh(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\| dt \leq \int_0^1 \underbrace{\|dh(\gamma(t))\|}_{\leq C} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{=\|x_2 - x_1\|} dt \leq C \|x_2 - x_1\|.$$

Soit $a \in E$ et soit U un ouvert de E contenant a . Soit $f : U \rightarrow E$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telle que $df(a) = \text{Id}_E$.

Q6 Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $\overline{B(a, r)} \subset U$ et :

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B(a, r)} \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Considérons l'application définie sur U par :

$$h : x \mapsto x - f(x).$$

L'application h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U en tant que différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et on a en particulier :

$$dh(a) = \text{Id}_E - df(a) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Comme dh est continue en a , on déduit de ce qui précède l'existence de $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in U \cap \overline{B(a, r)} \quad \|dh(x)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Quitte à diminuer r , on peut même supposer $\overline{B(a, r)} \subset U$ car U est ouvert contenant a .

Alors, par la question précédente (avec $V = \overline{B(a, r)}$ qui est bien convexe), on a :

$$\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a, r)}^2 \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Or, par l'inégalité triangulaire renversée :

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a, r)}^2 \quad \|h(x_1) - h(x_2)\| &= \|(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))\| \\ &\geq \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \end{aligned}$$

donc :

$$\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a, r)}^2 \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Nous fixons désormais un réel $r > 0$ vérifiant ces conditions dont la valeur sera utilisée dans la suite des questions.

Q7 Montrer que, pour tout $x \in \overline{B(a, r)}$, l'application linéaire $df(x)$ est injective.

- *Première solution.* — Soient $x \in B(a, r)$ et $h \in E$.

On a $df(x) \cdot h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(x + th) - f(x))$.

Or par la question précédente, on a pour tout $t > 0$:

$$\|f(x + th) - f(x)\| \geq \frac{1}{2}\|th\| = \frac{t}{2}\|h\|$$

donc la limite du taux d'accroissement donne :

$$\|df(x) \cdot h\| \geq \frac{\|h\|}{2}$$

ce dont on déduit immédiatement que le noyau de $df(x)$ est trivial.

Si $df(x) \cdot h = 0$ alors $h = 0$ par propriété de séparation de la norme.

Ainsi $df(x)$ est injective.

- *Deuxième solution.* — Si l'on regarde de plus près la résolution de la question précédente, on a montré :

$$\|\text{Id}_E - df(x)\| = \|dh(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

et comme la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, cela implique :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \|(\text{Id}_E - df(x))^n\| \leq \|\text{Id}_E - df(x)\|^n \leq \frac{1}{2^n}$$

or la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge car $\frac{1}{2} < 1$.

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} (\text{Id}_E - df(x))^n$ converge absolument donc converge (rappelons que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie).

On a de plus, par continuité de la composition d'applications linéaires $(u, v) \mapsto u \circ v$:

$$\begin{aligned} df(x) \circ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (\text{Id}_E - df(x))^n \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} df(x) \circ (\text{Id}_E - df(x))^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{Id}_E - (\text{Id}_E - df(x))) \circ (\text{Id}_E - df(x))^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((\text{Id}_E - df(x))^n - (\text{Id}_E - df(x))^{n+1}) \\ &= \text{Id}_E \end{aligned}$$

et dans $\mathcal{L}(E)$ un inverse à droite est aussi un inverse à gauche (parce que E est supposé de dimension finie), donc $df(x)$ est inversible et on a :

$$(df(x))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{Id}_E - df(x))^n.$$

Soit $y_0 \in E$ tel que $\|y_0 - f(a)\| \leq \frac{r}{4}$.

Q8 Montrer que l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \overline{B(a, r)} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \|y_0 - f(x)\|^2 \end{array} \right.$$

admet un minimum atteint en un point x_0 de $B(a, r)$.

L'application g est continue par composition de $x \mapsto y_0 - f(x)$ (l'application f est en effet continue car de classe $\mathcal{C}^1$) et de $\|\cdot\|$ (qui est continue car 1-lipschitzienne dans $(E, \|\cdot\|)$).

De plus $\overline{B(a, r)}$ est une partie fermée et bornée de E qui est de dimension finie, donc c'est un compact.

Par le théorème des bornes atteintes, g admet un minimum global x_0 sur $\overline{B(a, r)}$.

Montrons que ce minimum est en fait atteint sur $B(a, r)$.

Si $x_0 \in B(a, r)$, alors il n'y a rien à ajouter.

Si x_0 vérifie, $\|x_0 - a\| = r$, alors :

$$\|f(a) - y_0\| \leq \frac{r}{4} = \frac{\|x_0 - a\|}{4} \stackrel{(Q6)}{\leq} \frac{\|f(x_0) - f(a)\|}{2} \leq \|f(x_0) - f(a)\|,$$

donc les valeurs absolues se simplifient ci-dessous lorsqu'on utilise l'inégalité triangulaire renversée :

$$\begin{aligned} \|y_0 - f(x_0)\| &= \|y_0 - f(a) + f(a) - f(x_0)\| \geq \| \|y_0 - f(a)\| - \|f(a) - f(x_0)\| \| \\ &= \|f(a) - f(x_0)\| - \|y_0 - f(a)\| \\ &\geq \frac{\|a - x_0\|}{2} - \|y_0 - f(a)\| & (Q6) \\ &\geq \frac{r}{2} - \frac{r}{4} \\ &= \frac{r}{4} \\ &\geq \|y_0 - f(a)\|, \end{aligned}$$

donc $g(x_0) \geq g(a)$.

Comme g atteint un minimum global en x_0 , ce doit être une égalité, donc $g(a) = g(x_0)$.

On en déduit que g atteint ce minimum global en a , qui appartient évidemment à $B(a, r)$.

Dans tous les cas, g atteint un minimum global en un point de $B(a, r)$.

Q9 Montrer que $f(x_0) = y_0$.

Posons $u = y_0 - f(x_0)$ pour abréger.

On a montré à la question **Q7** que $df(x_0)$ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie.

Il est donc bijectif.

Soit $h \in E$ tel que $df(x_0) \cdot h = u$.

L'application $t \mapsto g(x_0 + th)$ est définie sur un voisinage de 0 et admet un minimum local en 0.

Montrons qu'elle est dérivable en ce point. On a pour tout t au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} g(x_0 + th) - g(x_0) &= \|u - df(x_0) \cdot th - \|th\| \varepsilon(th)\|^2 - \|u\|^2 \\ &= \|u - tu - \|th\| \varepsilon(th)\|^2 - \|u\|^2 \\ &= \|(1-t)u - \|th\| \varepsilon(th)\|^2 - \|u\|^2 \end{aligned}$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 et de limite nulle en ce point.

Or, par l'inégalité triangulaire (classique et renversée), on a pour tout t au voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned} (1-t)^2 \|u\|^2 - 2|1-t| \|u\| \| \|th\| \varepsilon(th) \| + \|th\|^2 \|\varepsilon(th)\|^2 &\leq \|(1-t)u - \|th\| \varepsilon(th)\|^2 \\ &\leq (1-t)^2 \|u\|^2 + 2|1-t| \|u\| \| \|th\| \varepsilon(th) \| + \|th\|^2 \|\varepsilon(th)\|^2 \end{aligned}$$

donc, pour tout t non nul au voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned} (-2+t) \|u\|^2 - 2|1-t| \|u\| \frac{\|th\| \|\varepsilon(th)\|}{t} + t \|h\|^2 \|\varepsilon(th)\|^2 &\leq \frac{g(x_0 + th) - g(x_0)}{t} \\ &\leq (-2+t) \|u\|^2 + 2|1-t| \|u\| \frac{\|th\| \|\varepsilon(th)\|}{t} + t \|h\|^2 \|\varepsilon(th)\|^2 \end{aligned}$$

On vérifie que les deux extrémités de l'encadrement tendent vers $-2\|u\|^2$.

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + th) - g(x_0)}{t} = -2\|u\|^2$$

ce qui montre que g admet une dérivée en x_0 dans la direction h , qui vaut :

$$D_h g(x_0) = -2\|u\|^2 = -2\|y_0 - f(x_0)\|^2.$$

Mais $t \mapsto g(x_0 + th)$ admet un extremum local en x_0 d'après ce qu'on a raconté plus haut. On a donc $D_h g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $y_0 = f(x_0)$ par propriété de séparation de la norme.

Autre solution, dans le cas particulier où la norme $\|\cdot\|$ est euclidienne. — Supposons que $\|\cdot\|$ est euclidienne, associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (par équivalence des normes, il n'aurait rien coûté de se placer dans ce cadre-là d'emblée, mais l'énoncé n'y invite pas).

Alors $\|\cdot\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E , par composition de l'application linéaire $h \mapsto (h, h)$ et de l'application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On a en outre, par la règle de la chaîne :

$$\forall (x, h) \in E^2 \quad d\|\cdot\|^2(x) \cdot h = \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle = 2\langle x, h \rangle.$$

En tant que composition d'applications de classe $\mathcal{C}^1$, l'application g est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme g atteint un minimum en x_0 sur $B(a, r)$, qui est un ouvert, le point x_0 est un point critique.

On a $dg(x_0) = 0$.

Or par la règle de la chaîne :

$$0 = dg(x_0) = -d\|\cdot\|^2(y - f(x_0)) \circ df(x_0)$$

et on a montré à la question **Q7** que $df(x_0)$ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie.

Il est donc inversible.

Composer l'égalité précédente par son inverse donne :

$$d\|\cdot\|^2(y - f(x_0)) = 0.$$

C'est-à-dire :

$$\forall h \in E \quad 2\langle y - f(x_0), h \rangle = 0.$$

On en déduit, pour $h = y - f(x_0)$, que $\|y - f(x_0)\|^2 = 0$, donc $y = f(x_0)$.

On note $W = \left\{ y \in E \mid \|y - f(a)\| < \frac{r}{4} \right\}$ et $V = f^{-1}(W) \cap B(a, r)$.

Q10 Justifier que V et W sont des ouverts de E .

L'application $h: y \mapsto \|y - f(a)\|$ est continue par continuité de la norme, donc $W = h^{-1}\left(]0, \frac{r}{4}[\right)$ est l'image réciproque d'un intervalle ouvert par une application continue. C'est un ouvert. En tant qu'intersection finie d'ouverts, V est aussi un ouvert.

Q11 Montrer que :

$$f|_V^W \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est une bijection continue de V sur W dont la réciproque est une fonction continue sur W .

La question **Q9** montre que $f|_V^W$ est surjective.

En effet, si $y_0 \in W$, alors en particulier $\|y_0 - f(a)\| \leq \frac{r}{4}$, et par ce qui précède il existe $x_0 \in B(a, r)$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Comme $y_0 \in W$, on a bien sûr $x_0 \in f^{-1}(W)$, donc $x_0 \in B(a, r) \cap W = V$, donc tout $y_0 \in W$ admet bien un antécédent dans V par f .

De plus la question **Q6** montre que $f|_V^W$ est injective.

Si $x_1, x_2 \in V$ vérifient $f(x_1) = f(x_2)$, alors on a $x_1, x_2 \in B(a, r)$ par définition de V , ce qui permet d'appliquer la question **Q6**, et on en déduit :

$$0 \leq \|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\| = 0$$

d'où $x_1 = x_2$.

Enfin $f|_V^W$ est continue puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Il reste à justifier que la bijection réciproque de $f|_V^W : V \longrightarrow W$ est continue.

Notons ABUSIVEMENT $f^{-1} : W \longrightarrow V$ cette réciproque, par commodité.

Nous allons montrer que f^{-1} est lipschitzienne.

Soit $y_1, y_2 \in W$.

On applique la question Q6 avec $x_1 = f^{-1}(y_1) \in B(a, r)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2) \in B(a, r)$.

On obtient :

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|f(f^{-1}(y_1)) - f(f^{-1}(y_2))\| = 2\|y_1 - y_2\|$$

ce qui montre bien que f^{-1} est 2-lipschitzienne donc continue sur W .

3. Convergence d'une suite de probabilités et arithmétique (X-ÉNS-2022-MPI-MP)

3.1. Convergence d'une suite de mesures de probabilités

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ un ensemble infini dénombrable où les x_i sont des éléments deux à deux distincts.

On note $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des probabilités sur $(E, \mathcal{P}(E))$. Si $\mu \in \mathcal{M}(E)$ et $x \in E$, on note $\mu(x)$ pour $\mu(\{x\})$.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Soit $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbf{R}$. Si $f \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$, on pose :

$$\|f\| = \sup\{|f(A)| : A \in \mathcal{P}(E)\}.$$

Q12 Montrer que $\mathcal{M}(E)$ est une partie de $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(E)$. On a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad 0 \leq \mu(A) \leq 1$$

et ainsi μ est bornée.

D'où $\mathcal{M}(E)$ est une partie de $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$.

Q13 Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$.

Soit f et $g \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\text{Montrons : } \begin{cases} \|f\| \in \mathbf{R}^+ \text{ (dont l'existence)} \\ \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \\ \|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \\ \|\lambda f\| = 0 \implies f = 0 \end{cases}$$

(i) L'ensemble $\{|f(A)| : A \in \mathcal{P}(E)\}$ est une partie non vide de $\mathbf{R}_+$ d'où l'existence de borne supérieure dans $\mathbf{R}_+$. Ainsi $\|f\| \in \mathbf{R}_+$.

(ii) On a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad |(f + g)(A)| \leq |f(A)| + |g(A)| \leq \|f\| + \|g\|$$

d'où $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

(iii) Si $\lambda = 0$, alors on a bien $\|\lambda f\| = 0 = |\lambda| \cdot \|f\|$

Si $\lambda \neq 0$, on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad |\lambda f(A)| = |\lambda| \cdot |f(A)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|$$

donc $\|\lambda f\| \leq |\lambda| \cdot \|f\|$.

En appliquant ce résultat à $1/\lambda$ et λf :

$$\|1 \cdot f\| \leq |1/\lambda| \cdot \|\lambda f\|$$

donc $|\lambda| \cdot \|f\| \leq \|\lambda f\|$.

Ainsi $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ dans tous les cas.

(iv) On suppose $\|\lambda f\| = 0$ donc $\sup\{|f(A)| : A \in \mathcal{P}(E)\} = 0$.

Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(A) = 0$, ce que l'on voulait.

On conclut que $\|\cdot\|$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$.

Q14 Soient $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}(E)$ et soit μ un élément de $\mathcal{M}(E)$. Montrer que si la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$, alors :

$$\forall x \in E \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(x) = \mu(x). \quad (1)$$

La norme étant celle de la convergence uniforme, alors la suite converge uniformément $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers μ sur $\mathcal{P}(E)$. Ainsi la suite converge simplement $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers μ sur $\mathcal{P}(E)$ donc pour tout $A \subset E$, la suite $(\mu_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\mu(A)$. En particulier pour les singletons, on obtient :

$$\forall x \in E \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(\{x\}) = \mu(\{x\}) = \mu(x).$$

On se propose réciproquement de montrer qu'une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}(E)$ vérifiant la condition (1) pour un élément $\mu \in \mathcal{M}(E)$ converge vers μ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$.

On fixe donc une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}(E)$ et $\mu \in \mathcal{M}(E)$ vérifiant la condition (1). On fixe également un réel $\varepsilon > 0$.

Q15 Montrer qu'il existe une partie finie F_ε de E et un entier $N_\varepsilon \geq 0$ tels que $\mu(F_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ et pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$:

$$\sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \varepsilon.$$

Avec les notations de l'énoncé, on a l'union disjointe dénombrable $E = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} \{x_i\}$.

Ainsi :

$$1 = \mu(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(x_i) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \mu(x_i)$$

or $1 > 1 - \varepsilon$.

Ceci nous fournit $m \geq 1$ tel que $\sum_{i=1}^m \mu(x_i) > 1 - \varepsilon$.

On pose $F_\varepsilon = \{x_i : i \in [1, m]\}$ et ainsi $\mu(F_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

Ainsi, il existe bien une partie finie F_ε de E tel que $\mu(F_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

Par hypothèse, on a :

$$\forall i \in [1, m] \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |\mu_n(x_i) - \mu(x_i)| = 0.$$

Par somme finie, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| = 0$.

Ce qui nous fournit un entier $N_\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$, on ait $\sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \varepsilon$.

Q16 Montrer que pour toute partie A de E :

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq |\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)| + \mu(E \setminus F_\varepsilon) + \mu_n(E \setminus F_\varepsilon)$$

et en déduire que si $n \geq N_\varepsilon$, alors $|\mu_n(A) - \mu(A)| < 4\varepsilon$.

Comme on a l'union disjointe $A = (A \cap F_\varepsilon) \sqcup (A \setminus F_\varepsilon)$, alors $\mu(A) = \mu(A \cap F_\varepsilon) + \mu(A \setminus F_\varepsilon)$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme c'est analogue pour μ_n , par inégalités triangulaires successives :

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq |\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)| + |\mu_n(A \setminus F_\varepsilon) - \mu(A \setminus F_\varepsilon)|$$

d'où :

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq |\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)| + \mu(A \setminus F_\varepsilon) + \mu_n(A \setminus F_\varepsilon).$$

On a $A \setminus F_\varepsilon \subset E \setminus F_\varepsilon$. Or μ et μ_n est croissante pour l'inclusion. On obtient donc :

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq |\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)| + \mu(E \setminus F_\varepsilon) + \mu_n(E \setminus F_\varepsilon).$$

On suppose que $n \geq N_\varepsilon$. Comme $A \cap F_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ (parties finies), on a alors avec la question précédente :

$$|\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)| \leq \left| \sum_{x \in F_\varepsilon \cap A} (\mu_n(x) - \mu(x)) \right| \leq \sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \varepsilon.$$

De plus, $\mu(E \setminus F_\varepsilon) = 1 - \mu(F_\varepsilon) < \varepsilon$ car $\mu(F_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

On a, de manière analogue :

$$\mu_n(E \setminus F_\varepsilon) = 1 - \mu(F_\varepsilon) - (\mu_n(F_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon)) \leq \mu(E \setminus F_\varepsilon) + |\mu_n(F_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon)| < 2\varepsilon.$$

On en déduit que, si $n \geq N_\varepsilon$, alors $|\mu_n(A) - \mu(A)| < 4\varepsilon$.

Q17 En déduire que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers μ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$ si et seulement si elle vérifie la condition (1).

On vient de montrer que en supposant que la suite vérifie la condition (1) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad n \geq m \implies |\mu_n(A) - \mu(A)| < \varepsilon$$

en prenant $m = N_{\varepsilon/4}$ dont le choix ne dépend que de ε , μ et la suite (μ_n) .

Ainsi la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers μ sur $\mathcal{P}(E)$.

C'est dire $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers μ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$ (muni de la norme infinie).

La réciproque a été traitée en **Q14**.

Nous pouvons alors conclure que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers μ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$ si et seulement si elle vérifie la condition (1).

Q18 Pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$, on note δ_k la mesure de probabilité sur E telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\delta_k(\{x_n\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite $(\delta_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge-t-elle dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$?

Par l'absurde on suppose que $(\delta_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$ vers une limite notée $\mu \in \mathcal{M}(E)$.

Selon la condition (1), on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \mu(x_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k(x_n).$$

Or, pour tout $k > n$, $\delta_k(x_n) = 0$ d'où, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mu(x_n) = 0$.

Ainsi comme $\mu \in \mathcal{M}(E)$, alors $1 = \mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(x_n) = 0$. Absurde !

On conclut que la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ ne converge pas dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$.

Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}(E)$.

Q19 Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout entier $1 \leq i \leq k$, la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.

On va construire la suite d'extractrices par récurrence.

On remarque que :

$$\forall i \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \mu_n(x_i) \in [0, 1]$$

car $\mu_n \in \mathcal{M}(E)$.

- *Initialisation.* — La suite $(\mu_n(x_i))_{n \geq 1}$ est à valeurs dans le segment $[0, 1]$.
Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous fournit alors $\varphi_1 : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{N}^*$ strictement croissante telle que $(\mu_{\varphi_1(n)}(x_1))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.
- *Hérédité.* — Soit $p \in \mathbf{N}^*$. On suppose avoir construit $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ p applications strictement croissantes de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et pour tout entier $1 \leq i \leq k$, la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.
Le théorème de Bolzano-Weierstrass appliqué à la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p(n)}(x_{p+1}))_{n \in \mathbf{N}^*}$ nous fournit $\varphi_{p+1} : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{N}^*$ strictement croissante telle que la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_{p+1}(n)}(x_{p+1}))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.
De sorte que pour tout $k \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$ et pour tout entier $1 \leq i \leq k$, la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.
- *Conclusion.* — On bien construit la suite voulue.

On a bien l'existence d'une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout entier $1 \leq i \leq k$, la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.

Q20 Montrer que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$ et tout entier $k \geq i$, la limite de la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \in \mathbf{N}^*}$ ne dépend que de i et pas de k . On note cette limite $\mu_\infty(x_i)$.

Soit $i \in \mathbf{N}^*$. Soit $p > k \geq i$.

Comme la composée d'applications strictement croissante de $\mathbf{N}^*$ vers $\mathbf{N}^*$ est strictement croissante de $\mathbf{N}^*$ vers $\mathbf{N}^*$, alors $\varphi_{k+1} \circ \dots \circ \varphi_p : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{N}^*$ est strictement croissante.

Alors $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p(n)}(x_i))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite extraite de $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \in \mathbf{N}^*}$.

Comme toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite, alors, pour tout entier $k \geq i$, la limite de la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \in \mathbf{N}^*}$ ne dépend que de i et pas de k .

Q21 Montrer que l'application :

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^* & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ k & \longmapsto & \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(k) \end{array} \right.$$

est strictement croissante, et que, pour tout entier $i \in \mathbf{N}^*$, la suite $(\mu_{\psi(k)}(x_i))_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge vers $\mu_\infty(x_i)$.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

L'application $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k$ est strictement croissante par composition.

Or $k \leq \varphi_{k+1}(k) < \varphi_{k+1}(k+1)$ car φ_{k+1} est une extractrice donc :

$$\psi(k) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(k) < \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(\varphi_{k+1}(k+1)) = \psi(k+1).$$

Ainsi l'application ψ est strictement croissante (c'est une extractrice).

On pose pour $k \in \llbracket 1, i \rrbracket$, $\psi_i(k) = k$ et pour $k \geq i+1$, $\psi_i(k) = \varphi_{i+1} \circ \dots \circ \varphi_k(k)$.

De la même manière l'application ψ_i est strictement croissante de $\mathbf{N}^*$ vers $\mathbf{N}^*$, c'est une extractrice.

La suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}(x_i))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers $\mu_\infty(x_i)$ selon la question précédente.

Par ailleurs pour tout $k \geq i$, on a $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_i \circ \psi_i(k) = \psi(k)$.

Donc en tant que suite extraite, la suite $(\mu_{\psi(k)}(x_i))_{k \geq i}$ converge vers $\mu_\infty(x_i)$.

Q22 Montrer que $\mu_\infty(x_i) \geq 0$ pour tout i de $\mathbf{N}^*$, et que $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_\infty(x_i) \leq 1$.

La suite $(\mu_{\psi(k)}(x_i))_{k \in \mathbf{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ (les μ_n sont des probabilités).
Par passage à la limite, $\mu_{\infty}(x_i) \geq 0$, pour tout i de $\mathbf{N}^*$.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Comme $\mu_{\psi(k)} \in \mathcal{M}(E)$, on a $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\psi(k)}(x_i) = 1$.

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. On a $\sum_{i=1}^N \mu_{\psi(k)}(x_i) = \mu_{\psi(k)}(\{x_i : i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}) \leq 1$.

En faisant tendre k vers $+\infty$, on a $\sum_{i=1}^N \mu_{\infty}(x_i) \leq 1$.

Ainsi la suite des sommes partielles $\left(\sum_{i=1}^N \mu_{\infty}(x_i) \right)_{N \in \mathbf{N}^*}$ est croissante et majorée par 1.

D'où la convergence de la série de somme $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\infty}(x_i) \leq 1$.

On dit que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}(E)$ est tendue si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F_{ε} de E telle que $\mu_n(F_{\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout entier naturel n .

Q23 On suppose de plus que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est tendue. Montrer alors que μ_{∞} définit un élément de $\mathcal{M}(E)$ qui est une valeur d'adhérence de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est tendue, cela nous fournit une partie finie F_{ε} de E telle que $\mu_n(F_{\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout entier naturel n .

On a donc :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{x \in F_{\varepsilon}} \mu_n(x) \geq 1 - \varepsilon$$

donc :

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{x \in F_{\varepsilon}} \mu_{\psi(k)}(x) \geq 1 - \varepsilon.$$

En passant à la limite, on a obtenu $\sum_{x \in F_{\varepsilon}} \mu_{\infty}(x) \geq 1 - \varepsilon$.

En utilisant la question précédente, la série $\sum_{i \geq 1} \mu_{\infty}(x_i)$ est convergente et à terme positifs, on a donc :

$$1 \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_{\infty}(x_i) \geq 1 - \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_{\infty}(x_i) = 1$.

Ainsi la famille $(\mu(x))_{x \in E}$ est une famille de réels positifs sommable de somme 1 (par permutation).

Selon le théorème sur les distributions de probabilités, on obtient $\mu_{\infty} \in \mathcal{M}(E)$.

Or :

$$\forall x \in E \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_{\psi(k)}(x) = \mu_{\infty}(x) \quad [\text{Q21}]$$

et la suite $(\mu_{\psi(k)})_{k \in \mathbf{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathcal{M}(E)$.

La condition (1) étant vérifiée, la suite extraite $(\mu_{\psi(k)})_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge vers μ_{∞} dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$.

Ainsi μ_{∞} est une valeur d'adhérence de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$.

3.2. Une version probabiliste du théorème fondamental de l'arithmétique

Soit E une partie infinie dénombrable de $\mathbf{R}$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires apparaissant dans la suite de ce problème. On admet que toutes les variables aléatoires introduites peuvent être construites sur cet espace.

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans E . On appelle loi de la variable X et on note μ_X l'application :

$$\mu_X \left| \begin{array}{ll} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longmapsto \mathbf{P}(\{X \in A\}) \end{array} \right.$$

où $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$.

Q24 Vérifier que μ_X est une probabilité sur E .

$(E, \mathcal{P}(E))$ est bien espace probabilisable.

- *Bien définie.* — Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a bien $\{X \in A\} \in \mathcal{A}$ car X est une variable aléatoire. Ainsi on a bien l'existence (et l'unicité) de $\mu_X(A) = \mathbf{P}(\{X \in A\})$ dans $[0, 1]$.
- $\mu_X(E)$. — On a $\{X \in E\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} = \Omega$ donc :

$$\mu_X(E) = \mathbf{P}(\{X \in E\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

- σ -additivité — Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de parties de E deux à deux disjointes. On a :

$$\left\{ X \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right\} = \left\{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left\{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in A_k \right\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X \in A_k\}.$$

Or pour $i \neq j$ dans $\mathbf{N}$, comme $A_i \cap A_j = \emptyset$:

$$\{X \in A_i\} \cap \{X \in A_j\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_i \text{ et } X(\omega) \in A_j\} = \emptyset.$$

Ainsi, par σ -additivité de $\mathbf{P}$:

$$\mu_X \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = \mathbf{P} \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X \in A_k\} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{X \in A_k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_X(A_k).$$

- *Conclusion* — μ_X est une probabilité sur E .

Q25 Montrer que pour toutes variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et pour toute partie A de E :

$$|\mu_X(A) - \mu_Y(A)| \leq \mathbf{E}(|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|)$$

et en déduire que $\|\mu_X - \mu_Y\| \leq \mathbf{P}(X \neq Y)$, où $\{X \neq Y\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et A une partie de E .

Selon le cours $\mathbb{1}_{\{X \in A\}}$ est une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{1}_{\{X \in A\}} \sim \mathcal{B}(\mathbf{P}(\{X \in A\}))$.

C'est à dire que $\mathbb{1}_{\{X \in A\}}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(\{X \in A\})$ car $\{X \in A\} \in \mathcal{A}$. On a donc :

$$\mu_X(A) = \mathbf{P}(\{X \in A\}) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{X \in A\}}).$$

Par linéarité et comme c'est analogue avec Y :

$$\mu_X(A) - \mu_Y(A) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}).$$

Or :

$$-1 \leq -|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}| \leq \mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}} \leq |\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}| \leq 1.$$

On en déduit :

$$-\mathbf{E}(|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|) \leq \mu_X(A) - \mu_Y(A) \leq \mathbf{E}(|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|).$$

On a bien $|\mu_X(A) - \mu_Y(A)| \leq \mathbf{E}(|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|)$.

Pour G et H partie de Ω , on note $G \Delta H = (G \cup H) \setminus (G \cap H)$ (différence symétrique), on a alors :

$$\forall \omega \in \Omega \quad |\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|(\omega) = 1 \iff \omega \in \{X \in A\} \Delta \{Y \in A\}.$$

De plus $|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc :

$$|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}| \sim \mathcal{B}(\mathbf{P}(\{X \in A\} \Delta \{Y \in A\})) .$$

On remarque que $(\{X \in A\} \Delta \{Y \in A\}) \subset \{X \neq Y\}$ donc :

$$\mathbf{E}(|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|) = \mathbf{P}(\{X \in A\} \Delta \{Y \in A\}) \leq \mathbf{P}(X \neq Y) .$$

Ainsi :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad |(\mu_X - \mu_Y)(A)| \leq \mathbf{P}(X \neq Y) .$$

Ce qui permet de déduire que $\|\mu_X - \mu_Y\| \leq \mathbf{P}(X \neq Y)$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans E . On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire et converge vers $X(\omega)$.

On définit aussi la variable aléatoire :

$$L \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \\ \omega \longmapsto \end{array} \right. \begin{cases} 0 & \text{si, pour tout } n \in \mathbf{N}, X_n(\omega) = X(\omega) \\ \max \{n \in \mathbf{N} : X_n(\omega) \neq X(\omega)\} & \text{sinon .} \end{cases}$$

Q26 Justifier que l'application L est bien définie.

Soit $\omega \in \Omega$.

Si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n(\omega) = X(\omega)$, alors $L(\omega) = 0 \in \mathbf{N}$ est bien défini.

Sinon $\{n \in \mathbf{N} : X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbf{N}$, car la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire de limite $X(\omega)$, donc cet ensemble admet un maximum $L(\omega) \in \mathbf{N}$.

Ainsi l'application L est bien définie

Q27 Montrer que $\mathbf{P}(X_n \neq X) \leq \mathbf{P}(L \geq n)$ pour tout entier n de $\mathbf{N}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X_n(\omega) \neq X(\omega)$.

Alors $n \in \{k \in \mathbf{N} : X_k(\omega) \neq X(\omega)\}$ donc $n \leq \max \{k \in \mathbf{N} : X_k(\omega) \neq X(\omega)\} = L(\omega)$

On vient de montrer que $(X_n \neq X) \subset (L \geq n)$ d'où $\mathbf{P}(X_n \neq X) \leq \mathbf{P}(L \geq n)$.

Q28 En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_{X_n} - \mu_X\| = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

On a selon **Q25** et **Q27** :

$$\|\mu_{X_n} - \mu_X\| \leq \mathbf{P}(X_n \neq X) \leq \mathbf{P}(L \geq n) .$$

Par ailleurs, on remarque que :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} \{L \geq n\} = \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbf{N}, L(\omega) \geq n\} = \emptyset$$

car L est bien définie à valeurs dans $\mathbf{N}$.

Ainsi par continuité décroissante :

$$\mathbf{P}(L \geq n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \{L \geq n\}\right) = 0 .$$

Avec le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_{X_n} - \mu_X\| = 0$.

Si $N \in \mathbf{N}^*$ et p est un nombre premier, on note $v_p(N)$ la valuation p -adique de N . Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit l'application :

$$\psi_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}^* & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ x & \longmapsto & \prod_{i=1}^n p_i^{v_{p_i}(x)} \end{array} \right.$$

où $(p_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ est la suite des nombres premiers, classés par ordre croissant.

Q29 Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(X = x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\psi_n(X) = x) .$$

Soit $N \in \mathbf{N}^*$.

On remarque que :

$$\forall n \geq N \quad \psi_n(N) = N$$

car $p_n \geq N$.

Donc la suite $(\psi_n(N))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est stationnaire de limite N .

Ainsi pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(\psi_n(X)(\omega))_{n \in \mathbf{N}^*} = (\psi_n(X(\omega)))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est stationnaire et converge vers $X(\omega)$.

De plus X est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ qui est bien dénombrable, ce qui permet d'utiliser la question précédente :

$$\left\| \mu_{\psi_n(X)} - \mu_X \right\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

où $\|\cdot\|$ est la norme infinie sur $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbf{N}^*), \mathbf{R})$.

Comme les $\mu_{\psi_n(X)}$ et $\mu_X \in \mathcal{M}(\mathbf{N}^*)$ selon **Q24**, on peut appliquer la question **Q14** :

$$\forall x \in \mathbf{N}^* \quad \mu_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\psi_n(X)}(x) .$$

Or pour $x \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\mu_X(x) = \mathbf{P}(X \in \{x\}) = \mathbf{P}(X = x) \quad \text{et} \quad \mu_{\psi_n(X)}(x) = \mathbf{P}(\psi_n(X) = x) .$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(X = x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\psi_n(X) = x) .$$