

Un corrigé du devoir surveillé n°5

rédigé par François Dion (Q1–Q38)

1. Notations	1
2. Préliminaires	1
3. La fonction J_n	3
4. Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} t J_n(t) dt$	4
5. Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques	6
6. Interlude polynomial	8
7. Exemples de fonctions höldériennes	11
8. Espace $\mathcal{H}_{2\pi}^a$ et approximation uniforme par des polynômes trigonométriques	13
9. Étude d'une réciproque	14
10. Bonus	16

1. Notations

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$ on note $[[a, b]]$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leq k \leq b$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

où, pour tout $k \in [[-n, n]]$, $c_k \in \mathbf{C}$. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n . C'est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues 2π -périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ et $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ le sous-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 2π -périodiques. Pour $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $h > 0$, on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, on pose :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|.$$

2. Préliminaires

Q1. Montrer que si g est la fonction sinus, alors, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leq h$.

Soit g la fonction sinus, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|g'(t)| = |\cos(t)| \leq 1$.

Par inégalité des accroissements finis, on en déduit que g est 1-lipschitzienne et donc pour tous $t, s \in \mathbf{R}$ on a $|g(t) - g(s)| \leq |t - s|$.

Soit $h > 0$, alors pour tous $t, s \in \mathbf{R}$ tels que $|t - s| \leq h$ on aura $|g(s) - g(t)| \leq h$ et ainsi :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)| \leq h.$$

Q2. (a) Montrer que, pour tous $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $h > 0$, $\omega_g(h)$ est un réel bien défini.

Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Puisque g est continue, par théorème des bornes atteintes, g est bornée sur $[0, 2\pi]$.

Par 2π -périodicité, on en déduit que g est bornée sur $\mathbf{R}$.

Soit M une borne de $|g|$ sur $\mathbf{R}$, alors pour tous $s, t \in \mathbf{R}$ on a $|g(s) - g(t)| \leq 2M$.

Soit $h > 0$ fixé, l'ensemble : $\mathcal{E}_h = \{|g(s) - g(t)| : (t, s) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } |t - s| \leq h\}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure et $\omega_g(h)$ est bien défini.

(b) On suppose que $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$. Montrer que, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leq h \|g'\|_{\infty}$. En déduire que $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$.

Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$, alors $g' \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ donc comme ci-dessus g' est bornée sur $\mathbf{R}$, et $k = \|g'\|_\infty$ est un réel bien défini. Par inégalité des accroissements finis, g est k -lipschitzienne et donc étant donné $h > 0$, pour tous $t, s \in \mathbf{R}$ tels que $|t - s| \leq h$ on a :

$$|g(t) - g(s)| \leq k|t - s| \leq kh$$

et ainsi $\omega_g(h) \leq kh = h\|g'\|_\infty$.

On a par ailleurs $\omega_g(h) \geq 0$ pour tout $h > 0$ donc par théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$.

On admet que $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ est vrai pour tout $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Q3. Soit h et h' deux réels strictement positifs et soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$.

(a) Montrer que, si $h \leq h'$, alors $\omega_g(h) \leq \omega_g(h')$.

On suppose $h \leq h'$, alors avec la notation ci-dessus on aura $\mathcal{E}_h \subset \mathcal{E}_{h'}$ donc par propriété de la borne supérieure, $\omega_g(h) \leq \omega_g(h')$.

(b) Montrer que $\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$.

Soient s, t tels que $|s - t| \leq h + h'$, notons $u = \frac{h'}{h + h'}s + \frac{h}{h + h'}t$, de sorte que :

$$|s - u| = \left| s - \frac{h'}{h + h'}s - \frac{h}{h + h'}t \right| = \left| \frac{h}{h + h'}(s - t) \right| \leq \frac{h}{h + h'}(h + h') = h$$

et ainsi $|g(s) - g(u)| \leq \omega_g(h)$.

On a de même $|u - t| \leq h'$ donc $|g(u) - g(t)| \leq \omega_g(h')$.

On obtient alors par inégalité triangulaire

$$|g(s) - g(t)| \leq |g(s) - g(u)| + |g(u) - g(t)| \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$$

pour tout (s, t) tel que $|s - t| \leq h + h'$, et donc en passant à la borne supérieure, $\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel λ strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leq (1 + \lambda)\omega_g(h).$$

On en déduit alors par récurrence que $\omega_g(nh) \leq n\omega_g(h)$ pour tout $n \geq 1$: c'est une égalité pour $n = 1$, et si l'inégalité est vraie pour un certain n alors :

$$\omega_g((n + 1)h) = \omega_g(nh + h) \leq \omega_g(nh) + \omega_g(h) \leq n\omega_g(h) + \omega_g(h) \leq (n + 1)\omega_g(h).$$

Soit $\lambda > 0$ et $n = \lfloor \lambda \rfloor + 1$ qui vérifie $\lambda \leq n \leq (1 + \lambda)$, on a alors $\omega_g(\lambda h) \leq \omega_g(nh)$ d'après (a) et donc d'après (b), $\omega_g(\lambda h) \leq n\omega_g(h) \leq (1 + \lambda)\omega_g(h)$.

Q4. Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \, dt.$$

Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$, et $x \in \mathbf{R}$ fixé. Alors par relation de Chasles :

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) \, dt = \int_{-\pi+x}^{-\pi} g(t) \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \, dt + \int_{\pi}^{\pi+x} g(t) \, dt$$

et par le changement de variable $u = t - 2\pi$ et la 2π -périodicité de g :

$$\int_{\pi}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{-\pi+x} g(u + 2\pi) du = - \int_{-\pi+x}^{-\pi} g(u) du$$

d'où la relation :

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt .$$

Q5. Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, on note $\Delta(p)$ la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) dt .$$

Montrer que Δ définit un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$.

Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $n \in \mathbf{N}$.

Pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, on note $\Delta(p)$ la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) dt .$$

Soit $p \in \mathcal{T}_n$, pour tout $x \in \mathbf{R}$ la fonction $x \mapsto p(x-t)g(t)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$, ce qui garantit que $\Delta(p)(x)$ est bien défini.

Écrivons p sous la forme $p : x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ avec $c_k \in \mathbf{C}$ pour tout $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, alors :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^n c_k e^{ik(x-t)} \right) g(t) dt = \sum_{k=-n}^n c_k \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t) dt \right) e^{ikx} .$$

et ainsi $\Delta(p)$ définit un élément de $\mathcal{T}_n$, de coefficients $\widehat{c}_k = c_k \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t) dt \right)$ pour tout $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$.

Ainsi Δ définit une application de $\mathcal{T}_n$ vers $\mathcal{T}_n$.

Enfin, on a bien la linéarité de Δ car pour $p, q \in \mathcal{T}_n$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ on aura par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Delta(\lambda p + \mu q)(x) = \lambda \Delta(p)(x) + \mu \Delta(q)(x) .$$

Ainsi Δ définit un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$.

3. La fonction J_n

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction φ_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ en posant, pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4 .$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier $n \in \mathbf{N}$.

Q6. Montrer que pour tout réel t n'appartenant pas à $2\pi\mathbf{Z}$:

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 .$$

Soit $t \notin 2\pi\mathbf{Z}$, alors $e^{it} \neq 1$ donc par somme géométrique :

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t} (-2i) \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{e^{i\frac{1}{2}t} (-2i) \sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

et en élevant à la puissance 4 :

$$f_n(t) = \varphi_n(t)^4 = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4.$$

Q7. Montrer que φ_n^2 appartient à $\mathcal{T}_n$, puis que f_n appartient à $\mathcal{T}_{2n}$.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a :

$$(\varphi_n(t))^2 = e^{-nit} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikt} \right)^2 = e^{-nit} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n e^{ikt} e^{i\ell t} \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n e^{i(k+\ell-n)t}.$$

Or pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ on a $k+\ell-n \in \llbracket -n, n \rrbracket$ donc φ_n^2 est une combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto e^{ikt}$ avec $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, et appartient bien à $\mathcal{T}_n$.

Notons les coefficients $(c_k)_{-n \leq k \leq n}$ tels que pour tout t on ait $\varphi_n^2(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$, alors pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$(\varphi_n(t))^4 = \left(\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \right)^2 = \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n c_k c_\ell e^{i(k+\ell)t}$$

et pour tout $(k, \ell) \in \llbracket -n, n \rrbracket^2$ on a $k+\ell \in \llbracket -2n, 2n \rrbracket$ donc φ_n^4 appartient bien à $\mathcal{T}_{2n}$.

Q8. Montrer qu'il existe un réel strictement positif c_n tel que $\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1$.

La fonction f_n est continue et positive sur $[-\pi, \pi]$, et n'est pas identiquement nulle, donc $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt > 0$.

En posant $c_n = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt \right)^{-1} > 0$, on aura bien $\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose désormais $J_n = c_n f_n$, de sorte que J_n est une fonction réelle positive vérifiant :

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1.$$

4. Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

Q9. Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}.$

Au vu de l'expression de c_n ci-dessus, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) \, dt = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |t| f_n(t) \, dt}{\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) \, dt}.$$

Or par parité des fonctions $t \mapsto f_n(t)$ et $t \mapsto |t| f_n(t)$ on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| f_n(t) \, dt = 2 \int_0^{\pi} t f_n(t) \, dt \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) \, dt = 2 \int_0^{\pi} f_n(t) \, dt$$

d'où la formule
$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) \, dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) \, dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) \, dt}.$$

Q 10. Montrer que, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$.

Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^2$, de dérivée seconde $-\sin$ qui est toujours négative, donc la fonction est concave.

En conséquence, son graphe est situé en dessous de sa tangente à l'origine, d'équation $y = x$, et au dessus de la sécante reliant les points de coordonnées $(0, \sin(0))$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right)$, qui a pour équation $y = \frac{2}{\pi} x$.

On obtient ainsi l'encadrement :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t.$$

Q 11. En déduire $\int_0^{\pi} t f_n(t) \, dt \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} \, du$.

On en déduit que pour tout $t \in]0, \pi]$, puisque $\frac{t}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \leq \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\frac{t}{\pi}}$$

et donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} t f_n(t) \, dt = \int_0^{\pi} t \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 \, dt \leq \pi^4 \int_0^{\pi} \frac{\left(\sin(n+1)\frac{t}{2}\right)^4}{t^3} \, dt.$$

En utilisant le changement de variable $u = \frac{n+1}{2} t$ on obtient

$$\pi^4 \int_0^{\pi} \frac{\left(\sin(n+1)\frac{t}{2}\right)^4}{t^3} \, dt = \pi^4 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{\left(\frac{2u}{(n+1)}\right)^3} \frac{2 \, du}{n+1} = \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} \, du.$$

d'où l'inégalité souhaitée.

Q 12. En déduire également que $\int_0^{\pi} f_n(t) \, dt \geq 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} \, du$.

En utilisant maintenant l'inégalité $\sin \frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}$ pour tout $t \in]0, \pi]$ et le même changement de variable, on a :

$$\int_0^\pi f_n(t) dt \geq \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^4} dt = \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{\left(\frac{u}{(n+1)}\right)^4} \frac{2 du}{n+1} = 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du.$$

Q 13. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_{-\pi}^\pi |t|J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}$.

La fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^3}$ est continue, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est prolongeable par continuité en 0 et dominée par $u \mapsto \frac{1}{u^3}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Par positivité on a $\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 u}{u^3} du$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Il en va de même pour la fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^4}$, et on a $\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Comme la fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^4}$ est positive, continue et non identiquement nulle sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du > 0$.

On en déduit ainsi que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\int_{-\pi}^\pi |t|J_n(t) dt = \frac{\int_0^\pi t f_n(t) dt}{\int_0^\pi f_n(t) dt} \leq \frac{\pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du}{2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du} \leq \frac{\pi^4}{8(n+1)} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 u}{u^3} du}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du}.$$

On a donc bien une constante :

$$a := \frac{\pi^4}{8} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 u}{u^3} du}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du}.$$

indépendante de n telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\int_{-\pi}^\pi |t|J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}.$$

Comme la fonction $u \mapsto \frac{\sin^4 u}{u^3}$ est positive, continue et non identiquement nulle sur $]0, +\infty[$, $a > 0$.

5. Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $T_n g$ en posant, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^\pi J_n(x-t)g(t) dt.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que $(T_n g)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbf{R}$.

Q 14. Pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, montrer que :

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^\pi J_n(t)g(x-t) dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^\pi J_n(t)g(x) dt.$$

En déduire que $|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés, on effectue le changement de variable $u = x - t$:

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t) dt = \int_{x+\pi}^{x-\pi} J_n(u) g(x-u) (-du) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} J_n(u) g(x-u) du.$$

Les fonctions J_n et g étant 2π -périodiques, la fonction $u \mapsto J_n(u)g(x-u)$ l'est également et d'après Q 4. :

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t) dt.$$

Par ailleurs puisque $\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1$ on a immédiatement, en multipliant par la constante $g(x)$:

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x) dt.$$

On en déduit par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire que :

$$|T_n g(x) - g(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) (g(x-t) - g(x)) dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt.$$

Q 15. Le cas $\mathcal{C}^1$. — On suppose, seulement dans cette question, que g est $\mathcal{C}^1$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n g - g\|_{\infty} \leq \frac{a \|g'\|_{\infty}}{n+1},$$

où le réel a a été défini à la question Q 13.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, puisque $|(x-t) - x| = |t|$

$$|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|) \leq |t| \|g'\|_{\infty}$$

d'après Q 2.

On en déduit en utilisant l'inégalité obtenue en Q 13. que :

$$|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |t| \|g'\|_{\infty} dt \leq \frac{a \|g'\|_{\infty}}{n+1}$$

et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient bien que :

$$\|T_n g - g\|_{\infty} \leq \frac{a \|g'\|_{\infty}}{n+1}.$$

(b) Conclure que $(T_n g)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

On en déduit par théorème des gendarmes que $\|T_n g - g\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, autrement dit la suite $(T_n g)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

De plus puisque $J_n \in \mathcal{T}_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait d'après Q 5. que $T_n g \in \mathcal{T}_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc construit une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Q 16. Le cas $\mathcal{C}^0$. — Dans cette question, on ne suppose plus que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

On rappelle le résultat admis à la question Q 2. : $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels t et x

$$|g(x-t) - g(x)| \leq (1+n|t|) \omega_g(1/n).$$

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et deux réels t et x , comme précédemment $|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g(|t|)$.

En appliquant **Q 3.c** avec $\lambda = n|t|$ et $h = \frac{1}{n}$ on obtient alors

$$|g(x-t) - g(x)| \leq \omega_g\left(n|t| \cdot \frac{1}{n}\right) \leq (1+n|t|) \omega_g(1/n).$$

(b) En déduire qu'il existe $b > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n).$$

On en déduit alors que, pour n et x fixés :

$$|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) (1+n|t|) \omega_g(1/n) dt = \left(1+n \int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt\right) \omega_g(1/n)$$

et en utilisant à nouveau l'inégalité **Q 13**, on en déduit que :

$$|T_n g(x) - g(x)| \leq \left(1 + \frac{a n}{n+1}\right) \omega_g(1/n) \leq (1+a) \omega_g(1/n).$$

Ceci étant vrai pour tout x , on a en posant $b = 1+a > 0$ le fait que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n).$$

(c) Conclure que la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbf{R}$.

On a admis que $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$, on en déduit que $\omega_g(1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\|T_n g - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Comme précédemment, la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbf{R}$.

6. Interlude polynomial

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel $\mathbf{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On fixe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et on note T le polynôme $X^n + 1$.

Q 17. Montrer que T admet n racines simples dans $\mathbf{C}$.

Le polynôme $T' = nX^{n-1}$ ne s'annule qu'en 0 qui n'est pas racine de T donc toutes ses racines sont simples. Puisqu'il est scindé dans $\mathbf{C}$ et de degré n , il admet n racines simples dans $\mathbf{C}$. Explicitement, la résolution de l'équation :

$$T(z) = 0 \Leftrightarrow z^n = -1 = e^{-i\pi}$$

donne les racines $z_k = e^{i \frac{(2k-1)\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $z_1, \dots, z_n$ les racines de T .

Q 18. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $\prod_{j \neq k} (z_k - z_j) = T'(z_k)$.

Puisque T est unitaire, il s'écrit sous forme factorisée $T = \prod_{j=1}^n (X - z_j)$.

Fixons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et notons $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (X - z_j)$, de sorte que $T = (X - z_k)Q_k$, on a alors :

$$T' = (X - z_k)Q'_k + Q_k \quad \text{donc} \quad T'(z_k) = Q_k(z_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j).$$

Soit $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On considère la fraction rationnelle F donnée par $F = \frac{X^\ell}{X^n + 1}$.

On rappelle que, par décomposition en éléments simples de F , il y a existence et unicité de $\mu_1, \dots, \mu_n$ dans $\mathbb{C}$ et de E dans $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{X - z_k} + E.$$

Q 19. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mu_k = -\frac{z_k^{\ell+1}}{n}$ et que E est soit le polynôme nul, soit le polynôme constant égal à 1.

Multiplions la décomposition donnée dans l'énoncé par le polynôme T . On obtient alors, en réutilisant les polynômes Q_k introduits ci-dessus :

$$X^\ell = TF = \sum_{j=1}^n \mu_j Q_j + TE.$$

En fixant $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et en évaluant cette expression en z_k , on obtient compte tenu de $T(z_k) = 0$ et $Q_j(z_k) = 0$ pour $j \neq k$:

$$z_k^\ell = \mu_k Q_k(z_k) = \mu_k T'(z_k) = \mu_k n z_k^{n-1} = \mu_k n \frac{1}{z_k} \quad [\text{car } z_k^n = -1]$$

et ainsi $\mu_k = -\frac{z_k^{\ell+1}}{n}$.

Par ailleurs si $\ell \leq n-1$ alors le polynôme $TE = X^\ell - \sum_{j=1}^n \mu_j Q_j$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Or $\deg(T) = n$ donc E est nécessairement le polynôme nul.

Dans le cas où $\ell = n$, on a $F = \frac{X^n}{X^n + 1} = 1 - \frac{X^0}{X^n + 1}$. Puisque le polynôme E associé au cas $\ell = 0$ est le polynôme nul, celui associé au cas $\ell = n$ est constant égal à 1.

Q 20. Calculer $F'(1)$ et en déduire que $\ell = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k - 1)^2}$.

Par dérivation on a :

$$F' = \sum_{k=1}^n \frac{-\mu_k}{(X - z_k)^2} + E' = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(X - z_k)^2}$$

et au vu de l'expression de départ on a :

$$F' = \frac{\ell X^{\ell-1}(X^n + 1) - X^\ell(nX^{n-1})}{(X^n + 1)^2}$$

donc en évaluant en 1 on obtient :

$$F'(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(1 - z_k)^2} = \frac{2\ell - n}{4} = \frac{1}{2} \left(\ell - \frac{n}{2} \right)$$

d'où :

$$\ell = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k - 1)^2}.$$

Q21. En déduire que :

$$(a) \text{ pour tout polynôme } P \in \mathbf{C}_n[X], \quad XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2};$$

Soit $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $P_\ell = X^\ell$, alors l'égalité ci-dessus multipliée par X^ℓ donne :

$$\ell X^\ell = \frac{n}{2}X^\ell + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1} X^\ell}{(z_k - 1)^2} = \frac{n}{2}X^\ell + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k (z_k X)^\ell}{(z_k - 1)^2}$$

et par ailleurs $\ell X^\ell = X P'_\ell(X)$ donc cette égalité se réécrit :

$$X P'_\ell(X) = \frac{n}{2}P_\ell(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P_\ell(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$

Soit un polynôme $P \in \mathbf{C}_n[X]$ écrit sous la forme $P = \sum_{\ell=0}^n p_\ell P_\ell$, où $p_0, \dots, p_n \in \mathbf{C}$. Des arguments de linéarité permettent d'obtenir que :

$$X P'(X) = \sum_{\ell=0}^n p_\ell X P'_\ell(X) = \sum_{\ell=0}^n p_\ell \left(\frac{n}{2}P_\ell(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P_\ell(z_k X)}{(z_k - 1)^2} \right) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}.$$

L'expression obtenue **Q20.** dans le cas $\ell = 0$ donne immédiatement :

$$\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}.$$

Pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

Q22. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbf{C}[X]$.

Montrons que l'application $P \mapsto \|P\|$ est une norme sur $\mathbf{C}[X]$.

► Pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$ écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$ avec $(p_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ nulle à partir d'un certain rang, on a

pour tout $z \in \mathbf{U}$, $|P(z)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k|$ donc $|P|$ est borné sur $\mathbf{U}$ et $\|P\|$ est un réel positif bien défini.

► Séparation : soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\|P\| = 0$, alors $P(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbf{U}$ donc P a une infinité de racines et est de ce fait le polynôme nul.

► Homogénéité : soit $P \in \mathbf{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ alors pour tout $z \in \mathbf{U}$ on a $|(\lambda P)(z)| = |\lambda| |P(z)|$ donc $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$.

► Inégalité triangulaire : soient $P, Q \in \mathbf{C}[X]$, alors pour tout $z \in \mathbf{U}$ on a :

$$|P(z) + Q(z)| \leq |P(z)| + |Q(z)| \leq \|P\| + \|Q\|$$

donc $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$.

Q23. Montrer que, si z est un nombre complexe de module 1 et si $z \neq 1$, alors $\frac{z}{(z-1)^2}$ est un réel négatif.

Soit $z \in \mathbf{U}$ tel que $z \neq 1$, il s'écrit sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$. On a alors :

$$(z-1)^2 = (e^{i\theta} - 1)^2 = \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right)^2 = e^{i\theta} \left(2i \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 = -4z \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2$$

et ainsi $\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{-1}{4\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2}$ est un réel négatif.

Q 24. À l'aide de **Q 21.**, en déduire que, pour tout $P \in \mathbf{C}_n[X]$, $\|P'\| \leq n\|P\|$.

Soit $P \in \mathbf{C}_n[X]$, et soit $z \in \mathbf{U}$. alors d'après **Q 21.a** :

$$|P'(z)| = |z P'(z)| \leq \frac{n}{2} |P(z)| + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{z_k P(z_k z)}{(z_k - 1)^2} \right| \leq \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right| \right) \|P\|$$

où on a utilisé que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_k z \in \mathbf{U}$ donc $|P(z_k z)| \leq \|P\|$.

Or d'après **Q 23.** pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le nombre $\frac{z_k}{(z_k - 1)^2}$ est un réel négatif donc en utilisant **Q 21.b** :

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{-z_k}{(z_k - 1)^2} = \frac{n^2}{4}.$$

On obtient ainsi que pour tout $z \in \mathbf{U}$, $|P'(z)| \leq \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \frac{n^2}{4} \right) \|P\| = n\|P\|$ et finalement $\|P'\| \leq n\|P\|$.

Q 25. En déduire que, pour tout $q \in \mathcal{T}_n$, $\|q'\|_\infty \leq 3n\|q\|_\infty$.

Soit $q \in \mathcal{T}_n$, et les coefficients $(c_k)_{-n \leq k \leq n}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad q(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=-n}^n c_k e^{i(k+n)x} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} e^{ikx}.$$

On introduit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} X^k \in \mathbf{C}_{2n}[X]$, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad q(x) = e^{-inx} P(e^{ix}) \quad \text{et donc} \quad q'(x) = -in e^{-inx} P(e^{ix}) + i e^{-inx} P'(e^{ix}).$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$|q'(x)| \leq |-in e^{-inx} P(e^{ix}) + i e^{-inx} P'(e^{ix})| \leq n |P(e^{ix})| + |P'(e^{ix})|,$$

or $e^{ix} \in \mathbf{U}$ donc $|P(e^{ix})| \leq \|P\|$ et $|P'(e^{ix})| \leq \|P'\| \leq (2n)\|P\|$.

On remarque enfin que $\{e^{ix} : x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{U}$ donc :

$$\|q\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |q(x)| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |P(e^{ix})| = \sup_{z \in \mathbf{U}} |P(z)| = \|P\|.$$

Finalement pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|q'(x)| \leq 3n\|P\| = 3n\|q\|_\infty$ et ainsi $\|q'\|_\infty \leq 3n\|q\|_\infty$.

7. Exemples de fonctions höldériennes

Soit g une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ et soit $\alpha \in]0, 1]$.

On dit que g est α -höldérienne s'il existe $K > 0$ tel que, pour tous réels x et y de l'intervalle I , $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|^\alpha$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et soit h_α la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

Q 26. Soit y un réel positif, montrer que pour tout $x \geq y$ on a : $0 \leq x^\alpha - y^\alpha \leq (x - y)^\alpha$.

Soit y un réel positif.

Par croissance de la fonction $t \mapsto t^\alpha$, on a bien $0 \leq x^\alpha - y^\alpha$ pour tout $x \geq y$.

Par ailleurs si $y = 0$ on a $x^\alpha - y^\alpha = (x - y)^\alpha$ pour tout $x \geq 0$.

Supposons $y > 0$ et considérons la fonction $\psi : x \mapsto (x - y)^\alpha - x^\alpha + y^\alpha$.

Elle est continue sur $[y, +\infty[$ et dérivable sur $]y, +\infty[$ et pour tout $x > y$, $\psi'(x) = \alpha[(x - y)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}]$ qui est positif par décroissance de $t \mapsto t^{\alpha-1}$, puisque $\alpha - 1 < 0$.

On en déduit que ψ est croissante sur $[y, +\infty[$ et $\psi(y) = 0$, donc $\psi(x) \geq 0$ pour tout $x \geq y$.

On a bien prouvé que pour tout $x \geq y$ on a : $0 \leq x^\alpha - y^\alpha \leq (x - y)^\alpha$.

Q27. En déduire que h_α est α -höldérienne sur $\mathbf{R}_+$.

On obtient ainsi que pour tous $x, y \geq 0$ tels que $x \geq y$ on a $0 \leq h(x) - h(y) \leq (x - y)^\alpha$.

Si $x \leq y$, en intervertissant leur rôle, $0 \leq h(y) - h(x) \leq (y - x)^\alpha$.

Autrement dit on a bien $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|^\alpha$ pour tout x, y positifs donc h est α -höldérienne sur $[0, +\infty[$, avec la constante K prise égale à 1.

Q28. Soit $\beta \in]0, 1]$ tel que $\beta \neq \alpha$. Montrer que h_α n'est pas β -höldérienne.

Soit $\beta \in]0, 1]$ tel que $\beta \neq \alpha$.

On remarque que pour tout $x \geq 0$, $\frac{|h(x) - h(0)|}{|x - 0|^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.

Supposons d'abord $\beta > \alpha$, alors :

$$\frac{|h(x) - h(0)|}{|x - 0|^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

donc cette fonction n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$ et il ne peut exister de constante K telle que pour tout x on ait $|h(x) - h(0)| \leq K|x - 0|^\beta$. Ainsi h n'est pas β -höldérienne sur $\mathbf{R}_+$.

Dans le cas où $\beta < \alpha$, on a :

$$\frac{|h(x) - h(0)|}{|x - 0|^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

et pour la même raison, h n'est pas β -höldérienne sur $\mathbf{R}_+$.

Soit k la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$k : x \mapsto \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q29. Soit $y \in]0, 1]$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1 - y]$:

$$k(x + y) - k(x) \leq -k(1 - y).$$

Considérons la fonction définie sur $[0, 1 - y]$ par $\chi : x \mapsto k(x + y) - k(x)$.

Remarquons que k est continue sur $\mathbf{R}_+$ donc χ est continue sur $[0, 1 - y]$ et dérivable sur $]0, 1 - y]$ et :

$$\forall x \in]0, 1 - y] \quad \chi'(x) = \ln(x + y) + 1 - \ln(x) - 1 = \ln(x + y) - \ln(x) \geq 0 \quad \text{car } y \geq 0.$$

Ainsi χ est croissante sur $[0, 1 - y]$ donc :

$$\forall x \in [0, 1 - y] \quad \chi(x) \leq \chi(1 - y) = \ln(1) - k(1 - y).$$

On a ainsi bien obtenu que :

$$\forall x \in [0, 1 - y] \quad k(x + y) - k(x) \leq -k(1 - y).$$

Q30. En déduire que k est α -höldérienne sur $[0, 1]$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Soient $x, y \in [0, 1]$.

Quitte à intervertir leur rôle on peut supposer que $x \leq y$.

On va même dans un premier temps supposer $0 \leq x < y \leq 1$, et poser $t = y - x$.

L'inégalité précédente avec x et t (qui vérifient bien $0 \leq x \leq 1 - t$ puisque $y = x + t \leq 1$) donne :

$$k(y) - k(x) \leq -k(1 - t).$$

Puisque la fonction k n'est pas croissante, on a en fait tout intérêt à compléter cette inégalité par la minoration par $\chi(0) = k(t)$ et on obtient que :

$$k(t) \leq k(y) - k(x) \leq -k(1 - t) \quad \text{d'où} \quad |k(y) - k(x)| \leq \max(k(t), -k(1 - t)).$$

Considérons les fonctions :

$$u: t \mapsto \frac{-k(t)}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad v: t \mapsto \frac{-k(1 - t)}{t^\alpha}.$$

La fonction u est continue sur $]0, 1]$ et :

$$u(t) = -t^{1-\alpha} \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

par croissances comparées. Donc u est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$, donc bornée.

De même, v est continue sur $]0, 1]$ et on a :

$$v(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{1-\alpha} \quad \text{donc} \quad v(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

Donc v est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$, donc bornée.

Il existe donc une constante K telle que pour tout $t \in]0, 1]$:

$$\frac{\max(u(t), v(t))}{t^\alpha} \leq K$$

et ainsi $|k(x) - k(y)| \leq K(x - y)^\alpha$.

L'inégalité est vraie dans le cas où $x = y$.

8. Espace $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans la suite du problème, pour $\alpha \in]0, 1[$, on note $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ l'ensemble des fonctions α -höldériennes 2π -périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$, on pose $\delta_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty$.

Q31. Montrer que $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Soit $f \in \mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et K une constante associée, i.e. telle que, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|^\alpha.$$

Si nous fixons $x_0 \in \mathbf{R}$, il vient $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} f(x_0)$. Ainsi f est continue sur $\mathbf{R}$ et 2π périodique.

Finalement $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$, non vide car il contient la fonction nulle.

Soient $f, g \in \mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et K_f, K_g des constantes associées, et soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, alors pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ on a :

$$|(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(y)| \leq |\lambda| |f(x) - f(y)| + |\mu| |g(x) - g(y)| \leq (|\lambda|K_f + |\mu|K_g) |x - y|^\alpha.$$

donc $\lambda f + \mu g$ est α -höldérienne, et elle est 2π -périodique donc appartient à $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$.

Ainsi $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Q32. Montrer que si $g \in \mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$, alors $\delta_n(g) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Soit $g \in \mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$.

Remarquons que la condition α -höldérienne se traduit par le fait que pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leq K h^\alpha$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on a vu que $T_n g \in \mathcal{T}_{2n}$, donc en utilisant Q 16.b :

$$\delta_{2n}(g) \leq \|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n) \leq \frac{bK}{n^\alpha} = \frac{bK 2^\alpha}{(2n)^\alpha}.$$

Pour le cas impair, on peut écrire, puisque $\mathcal{T}_{2n+1} \supset \mathcal{T}_{2n}$:

$$\delta_{2n+1}(g) \leq \delta_{2n}(g) \leq \frac{bK 2^\alpha}{(2n)^\alpha} \leq \frac{bK 2^\alpha}{(2n+1)^\alpha} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^\alpha \leq \frac{bK 3^\alpha}{(2n+1)^\alpha}.$$

On a donc trouvé une constante D telle que $\delta_n(g) \leq \frac{D}{n^\alpha}$ pour tout $n \geq 2$, et ainsi $\delta_n(g) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

9. Étude d'une réciproque

L'objectif de cette sous-partie est d'établir une réciproque à la question Q 32.

On fixe un réel $\alpha \in]0, 1[$ et une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ telle que $\delta_n(f) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Il existe ainsi un réel $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\delta_n(f) \leq \frac{C}{n^\alpha}$.

Q 33. Pour $n \in \mathbf{N}$, montrer qu'il existe $q_n \in \mathcal{T}_n$ tel que $\delta_n(f) = \|f - q_n\|_\infty$.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

La fonction nulle appartient à $\mathcal{T}_n$ donc $\delta_n(f) \leq \|f\|_\infty$.

Notons $A = \{p \in \mathcal{T}_n : \|f - p\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}$ qui est non vide puisqu'il contient 0.

Montrons que A est un ensemble fermé. Soit :

$$\Phi \left| \begin{array}{l} \mathcal{T}_n \longrightarrow \mathbf{R} \\ p \longmapsto \|f - p\|_\infty \end{array} \right.$$

Cette application est continue (puisque 1-lipschitzienne) et $A = \Phi^{-1}([0, \|f\|_\infty])$ est donc un ensemble fermé. C'est également un ensemble borné car si $p \in A$ alors par inégalité triangulaire :

$$\|p\|_\infty \leq \|p - f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty.$$

Puisque A est fermé et borné dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{T}_n$, et que Φ est continue, d'après le théorème des bornes atteintes elle admet un minimum :

$$\exists q_n \in A \quad \|f - q_n\| = \min_{p \in A} \|f - p\|_\infty$$

Enfin, si $p \notin A$ alors $\|f - p\|_\infty > \|f\|_\infty \geq \delta_n(f)$ donc ce minimum est bien égal à $\delta_n(f)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère un polynôme $p_n \in \mathcal{T}_{2^n}$ tel que $\|f - p_n\|_\infty = \delta_{2^n}(f)$.

Q 34. Montrer, en appliquant l'inégalité établie à la question Q 25., qu'il existe un réel $C' > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\|p'_{n+1} - p'_n\|_\infty \leq C' 2^{n(1-\alpha)}.$$

La fonction $q = p_{n+1} - p_n$ appartient à $\mathcal{T}_{2^{n+1}}$ donc d'après Q 25. on a :

$$\|p'_{n+1} - p'_n\|_\infty \leq 3 \cdot 2^{n+1} \|p_{n+1} - p_n\|_\infty$$

Or $\|p_{n+1} - p_n\|_\infty \leq \|p_{n+1} - f\|_\infty + \|f - p_n\|_\infty = \delta_{2^{n+1}}(f) + \delta_{2^n}(f)$.

Donc :

$$\|p'_{n+1} - p'_n\|_\infty \leq 3 \cdot 2^{n+1} (\delta_{2^{n+1}}(f) + \delta_{2^n}(f)) \leq 3 \cdot 2^{n+1} \left(\frac{C}{2^{\alpha(n+1)}} + \frac{C}{2^{\alpha n}} \right) = \frac{6C(1+2^\alpha)}{2^\alpha} 2^{n(1-\alpha)}$$

d'où la majoration souhaitée avec $C' = \frac{6C(1+2^\alpha)}{2^\alpha}$.

Q 35. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} 2^{n(1-\alpha)}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$, alors $p_n = p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (p_{k+1} - p_k)$ donc par inégalité triangulaire :

$$\|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + \sum_{k=0}^{n-1} \|p'_{k+1} - p'_k\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + C' \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k(1-\alpha)}.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $2^{1-\alpha}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k(1-\alpha)} = \frac{2^{n(1-\alpha)} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} \leq \frac{2^{n(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha} - 1} \quad \text{donc finalement} \quad \|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} 2^{n(1-\alpha)}.$$

Q 36. En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|p'_n\|_\infty \leq A 2^{(1-\alpha)n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2^{(1-\alpha)n} \geq 1$ donc $\|p'_n\|_\infty \leq \left(\|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} \right) 2^{n(1-\alpha)}$.

On a donc bien un réel $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|p'_n\|_\infty \leq A 2^{(1-\alpha)n}.$$

Q 37. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq C 2^{1-n\alpha} + A 2^{(1-\alpha)n} |x - y|$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Par inégalité triangulaire on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - p_n(x)| + |p_n(x) - p_n(y)| + |p_n(y) - f(y)| \leq 2\|f - p_n\|_\infty + |p_n(x) - p_n(y)|.$$

Or p_n est de classe C^1 donc :

$$|p_n(x) - p_n(y)| \leq \omega_{p_n}(|x - y|) \leq \|p'_n\|_\infty |x - y|.$$

On obtient finalement :

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\delta_{2^n}(f) + \|p'_n\|_\infty |x - y| \leq 2 \frac{C}{(2^n)^\alpha} + A 2^{(1-\alpha)n} |x - y|$$

et ainsi on a bien obtenu la majoration $|f(x) - f(y)| \leq C 2^{1-n\alpha} + A 2^{(1-\alpha)n} |x - y|$.

Q 38. En déduire que f est α -höldérienne.

Indication : lorsque $0 < |x - y| \leq 1$, on pourra choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |x - y| \leq \frac{1}{2^n}$ et majorer $|f(x) - f(y)|$ à l'aide de la question précédente.

On souhaite montrer que f est α -höldérienne.

On cherche donc une constante K telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$.

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

► Si $x = y$ l'inégalité est vraie quel que soit K .

► La fonction f est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$. Elle est donc bornée sur ce segment et donc bornée sur $\mathbf{R}$ par 2π -périodicité. Soit M un majorant de $|f|$, e.g. $M = \|f\|_\infty$.

► Si $|x - y| \geq 1$ on a $|f(x) - f(y)| \leq 2M \leq 2M|x - y|^\alpha$.

► Supposons maintenant que $0 < |x - y| \leq 1$.

Choisissons $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |x - y| \leq \frac{1}{2^n}$, d'après ce qui précède on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq C 2^{1-n\alpha} + A 2^{(1-\alpha)n} \frac{1}{2^n} \leq \frac{2C + A}{2^{n\alpha}} \leq \frac{2^\alpha(2C + A)}{2^{(n+1)\alpha}} \leq 2^\alpha(2C + A)|x - y|^\alpha.$$

► Finalement en posant $K = \max(2M, 2^\alpha(2C + A))$ on aura bien $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$ pour tout (x, y) , et ainsi f est α -höldérienne.

10. Bonus

Q39. Démontrer le résultat admis à la question **Q2.**, i.e. : $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$, pour tout $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

- Une autre expression de $\omega_g(h)$ pour $h \in]0, 2\pi]$. — Fixons $h \in]0, 2\pi]$.

Par définition :

$$\omega_g(h) := \sup \mathcal{E}_{h,\mathbf{R}} \quad \text{où} \quad \mathcal{E}_{h,\mathbf{R}} := \{|g(s) - g(t)| : (t, s) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } |t - s| \leq h\}.$$

Nous allons démontrer que :

$$\mathcal{E}_{h,\mathbf{R}} = \mathcal{E}_{h,[-4\pi, 4\pi]} := \{|g(s) - g(t)| : (t, s) \in [-4\pi, 4\pi]^2 \text{ tel que } |t - s| \leq h\}$$

pour en déduire que :

$$(*) \quad \omega_g(h) = \sup \mathcal{E}_{h,[-4\pi, 4\pi]}.$$

Clairement $\mathcal{E}_{h,[-4\pi, 4\pi]} \subset \mathcal{E}_{h,\mathbf{R}}$. Établissons l'inclusion réciproque, en considérant $(t, s) \in \mathbf{R}^2$ tel que $|t - s| \leq h$ et en prouvant que :

$$|g(s) - g(t)| \in \mathcal{E}_{h,[-4\pi, 4\pi]} \quad \left[\text{i.e. } \exists (s', t') \in [-4\pi, 4\pi]^2 \quad |t' - s'| \leq h \text{ et } |g(s') - g(t')| = |g(s) - g(t)| \right].$$

Soit k l'unique entier tel que :

$$s + k 2\pi \in [0, 2\pi[\quad [\text{observons que } k = -\lfloor s/2\pi \rfloor \text{ où } \lfloor \cdot \rfloor \text{ est la fonction partie entière}].$$

Alors :

$$|t + k 2\pi| \leq |t - s| + |s + k 2\pi| \leq h + 2\pi \leq 4\pi.$$

Les réels $s' := s + k 2\pi$ et $t' := t + k 2\pi$ vérifient donc :

$$(s', t') \in [-4\pi, 4\pi]^2 \quad \text{et} \quad |t' - s'| = |t - s| \leq h$$

de sorte que :

$$|g(s) - g(t)| = |g(s') - g(t')| \in \mathcal{E}_{h,[-4\pi, 4\pi]} \quad [g \text{ est } 2\pi\text{-périodique}].$$

Apport du théorème de Heine. — Fixons $\varepsilon > 0$.

La fonction g est continue sur le segment $[-4\pi, 4\pi]$. D'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Ainsi existe-t-il $\alpha > 0$ tel que :

$$(**) \quad \forall (s, t) \in [-4\pi, 4\pi]^2 \quad |s - t| \leq \alpha \implies |g(t) - g(s)| \leq \varepsilon.$$

Soit $h \in]0, \beta]$, où $\beta := \min\{\alpha, 2\pi\} > 0$. D'après(**), le nombre ε majore l'ensemble $\mathcal{E}_{h,[-4\pi, 4\pi]}$ et donc :

$$\omega_g(h) \underset{(*)}{=} \sup \mathcal{E}_{h,[-4\pi, 4\pi]} \leq \varepsilon.$$

Nous avons établi que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}_+^* \quad |h - 0| \leq \beta \implies |\omega_g(h) - 0| \leq \varepsilon$$

ce qui est la définition de $\lim_{h \rightarrow 0^+} \omega_g(h) = 0$,