

Devoir surveillé n°5

samedi 20 décembre de 8h00 à 12h00

1. Notations	1
2. Préliminaires	1
3. La fonction J_n	2
4. Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} t J_n(t) dt$	2
5. Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques	2
6. Interlude polynomial	3
7. Exemples de fonctions höldériennes	4
8. Espace $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et approximation uniforme par des polynômes trigonométriques	4
9. Étude d'une réciproque	4
10. Bonus	4

1. Notations

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$ on note $[[a, b]]$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leq k \leq b$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

où, pour tout $k \in [[-n, n]]$, $c_k \in \mathbf{C}$. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n . C'est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues 2π -périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ et $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ le sous-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 2π -périodiques. Pour $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $h > 0$, on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|.$$

2. Préliminaires

Q 1. Montrer que si g est la fonction sinus, alors, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leq h$.

Q 2. (a) Montrer que, pour tous $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $h > 0$, $\omega_g(h)$ est un réel bien défini.

(b) On suppose que $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$. Montrer que, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leq h \|g'\|_\infty$. En déduire que $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$.

On admet que $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ est vrai pour tout $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Q 3. Soit h et h' deux réels strictement positifs et soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$.

(a) Montrer que, si $h \leq h'$, alors $\omega_g(h) \leq \omega_g(h')$.

(b) Montrer que $\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel λ strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leq n \omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leq (1 + \lambda) \omega_g(h).$$

Q 4. Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

Q 5. Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ et $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, on note $\Delta(p)$ la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que Δ définit un endomorphisme de $\mathcal{T}_n$.

3. La fonction J_n

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction φ_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ en posant, pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier $n \in \mathbf{N}$.

Q 6. Montrer que pour tout réel t n'appartenant pas à $2\pi\mathbf{Z}$:

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4.$$

Q 7. Montrer que φ_n^2 appartient à $\mathcal{T}_n$, puis que f_n appartient à $\mathcal{T}_{2n}$.

Q 8. Montrer qu'il existe un réel strictement positif c_n tel que $\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose désormais $J_n = c_n f_n$, de sorte que J_n est une fonction réelle positive vérifiant :

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1.$$

4. Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

Q 9. Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}.$

Q 10. Montrer que, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$.

Q 11. En déduire $\int_0^{\pi} t f_n(t) dt \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3} du.$

Q 12. En déduire également que $\int_0^{\pi} f_n(t) dt \geq 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4} du.$

Q 13. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}.$

5. Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $T_n g$ en posant, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t) dt.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que $(T_n g)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbf{R}$.

Q 14. Pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, montrer que :

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t) dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x) dt.$$

En déduire que $|T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)| dt.$

Q 15. Le cas $\mathcal{C}^1$. — On suppose, seulement dans cette question, que g est $\mathcal{C}^1$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq \frac{a \|g'\|_\infty}{n+1},$$

où le réel a a été défini à la question **Q 13**.

(b) Conclure que $(T_n g)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

Q 16. Le cas $\mathcal{C}^0$. — Dans cette question, on ne suppose plus que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

On rappelle le résultat admis à la question **Q 2** : $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels t et x

$$|g(x-t) - g(x)| \leq (1+n|t|) \omega_g(1/n).$$

(b) En déduire qu'il existe $b > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|T_n g - g\|_\infty \leq b \omega_g(1/n).$$

(c) Conclure que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

6. Interlude polynomial

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note T le polynôme $X^n + 1$.

Q 17. Montrer que T admet n racines simples dans $\mathbb{C}$.

On note $z_1, \dots, z_n$ les racines de T .

Q 18. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $\prod_{j \neq k} (z_k - z_j) = T'(z_k)$.

Soit $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On considère la fraction rationnelle F donnée par $F = \frac{X^\ell}{X^n + 1}$.

On rappelle que, par décomposition en éléments simples de F , il y a existence et unicité de $\mu_1, \dots, \mu_n$ dans $\mathbb{C}$ et de E dans $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{X - z_k} + E.$$

Q 19. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mu_k = -\frac{z_k^{\ell+1}}{n}$ et que E est soit le polynôme nul, soit le polynôme constant égal à 1.

Q 20. Calculer $F'(1)$ et en déduire que $\ell = \frac{n}{2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k - 1)^2}$.

Q 21. En déduire que :

(a) pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$;

(b) $\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}$.

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

Q 22. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

Q 23. Montrer que, si z est un nombre complexe de module 1 et si $z \neq 1$, alors $\frac{z}{(z-1)^2}$ est un réel négatif.

Q 24. À l'aide de **Q 21**., en déduire que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\| \leq n\|P\|$.

Q 25. En déduire que, pour tout $q \in \mathcal{T}_n$, $\|q'\|_\infty \leq 3n\|q\|_\infty$.

7. Exemples de fonctions höldériennes

Soit g une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ et soit $\alpha \in]0, 1]$.

On dit que g est α -höldérienne s'il existe $K > 0$ tel que, pour tous réels x et y de l'intervalle I , $|g(x) - g(y)| \leq K |x - y|^\alpha$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et soit h_α la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

Q 26. Soit y un réel positif, montrer que pour tout $x \geq y$ on a : $0 \leq x^\alpha - y^\alpha \leq (x - y)^\alpha$.

Q 27. En déduire que h_α est α -höldérienne sur $\mathbf{R}_+$.

Q 28. Soit $\beta \in]0, 1]$ tel que $\beta \neq \alpha$. Montrer que h_α n'est pas β -höldérienne.

Soit k la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$k : x \mapsto \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q 29. Soit $y \in]0, 1]$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1 - y]$:

$$k(x + y) - k(x) \leq -k(1 - y).$$

Q 30. En déduire que k est α -höldérienne sur $[0, 1]$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

8. Espace $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ et approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans la suite du problème, pour $\alpha \in]0, 1[$, on note $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ l'ensemble des fonctions α -höldériennes 2π -périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$, on pose $\delta_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{T}_n} \|f - p\|_\infty$.

Q 31. Montrer que $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Q 32. Montrer que si $g \in \mathcal{H}_{2\pi}^\alpha$, alors $\delta_n(g) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

9. Étude d'une réciproque

L'objectif de cette sous-partie est d'établir une réciproque à la question **Q 32**.

On fixe un réel $\alpha \in]0, 1[$ et une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ telle que $\delta_n(f) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Il existe ainsi un réel $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\delta_n(f) \leq \frac{C}{n^\alpha}$.

Q 33. Pour $n \in \mathbf{N}$, montrer qu'il existe $q_n \in \mathcal{T}_n$ tel que $\delta_n(f) = \|f - q_n\|_\infty$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère un polynôme $p_n \in \mathcal{T}_{2^n}$ tel que $\|f - p_n\|_\infty = \delta_{2^n}(f)$.

Q 34. Montrer, en appliquant l'inégalité établie à la question **Q 25.**, qu'il existe un réel $C' > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\|p'_{n+1} - p'_n\|_\infty \leq C' 2^{n(1-\alpha)}.$$

Q 35. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\|p'_n\|_\infty \leq \|p'_0\|_\infty + \frac{C'}{2^{1-\alpha} - 1} 2^{n(1-\alpha)}.$$

Q 36. En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\|p'_n\|_\infty \leq A 2^{(1-\alpha)n}.$$

Q 37. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq C 2^{1-n\alpha} + A 2^{(1-\alpha)n} |x - y|$.

Q 38. En déduire que f est α -höldérienne.

Indication : lorsque $0 < |x - y| \leq 1$, on pourra choisir $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |x - y| \leq \frac{1}{2^n}$ et majorer $|f(x) - f(y)|$ à l'aide de la question précédente.

10. Bonus

Q 39. Démontrer le résultat admis à la question **Q 2.**, i.e. : $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$, pour tout $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.