

Un corrigé du devoir surveillé n°4 — piste vermillon

1. Questions de cours	1
2. Natures et sommes éventuelles de séries	1
3. Règle de Raabe-Duhamel	3
4. Transformée d'Abel	6
5. Lemme de Cesàro [ÉNS-MPI-2024]	10
5.1. Énoncé et démonstration du théorème	11
5.2. Applications	11
5.3. Réciproques partielles	14
6. Surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$	17

1. Questions de cours

- Rappeler la définition de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Donner la valeur de $\exp(A)$ dans le cas où $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Énoncer la règle de d'Alembert pour les séries numériques et démontrer le résultat dans le cas où $\ell < 1$.
- Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?
- Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la famille $\left(\frac{1}{n^\alpha + m^\alpha} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

2. Natures et sommes éventuelles de séries

- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme, à l'aide de $\zeta(2) := \frac{\pi^2}{6}$.

On décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2(X+1)^2}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2(X+1)^2} = -\frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2} &= -2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= 2 \left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= 2 \left(\frac{1}{n+1} - 1 \right) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - 3 \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 3. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$.

- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge et calculer sa somme.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln(k-1) + \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k).$$

Après télescopes :

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(n) - \ln(2) + \ln(n+1) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2).$$

Donc la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$.

3. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Nous savons :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = e \left(e^{-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}\right) = e \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme :

- $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e}{2n} \geq 0$;
- la série harmonique diverge ;

le théorème de comparaison livre la divergence de la série $\sum_{n \geq 2} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

4. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}$.

Les croissances comparées des fonctions puissances et logarithme livrent :

$$\frac{1}{n^{3/4}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}\right).$$

Supposons que la série à termes positifs $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}$ converge. Par théorème de comparaison, la série $\sum \frac{1}{n^{3/4}}$ est alors (absolument) convergente, ce qui contredit le critère de Riemann.

La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}$ est donc divergente.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$.

- Cas où $x = 0$. — La série converge pour $x = 0$.

- Cas où $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. — Supposons $x \neq 0$ et posons, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n(x) := \frac{\ln(n)}{n^2} x^n \neq 0.$$

Comme :

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n)).$$

il vient :

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{\ln(n+1)n^2}{\ln(n)(n+1)^2} |x| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x| \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} x.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$.

- Cas où $x \in \{-1, 1\}$. — Si $x \in \{-1, 1\}$, alors :

$$|u_n(x)| = \frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

d'après les croissances comparées. Comme :

- $|u_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$;
- pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$;
- la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (critère de Riemann) ;

le théorème de comparaison livre que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$ est absolument convergente.

3. Règle de Raabe-Duhamel

6. Soit β un nombre réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Former un développement asymptotique du quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\beta = \exp\left(\beta \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

Nous rappelons :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x).$$

Comme $-\frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, nous en déduisons :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Nous rappelons :

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x).$$

Comme $-\frac{\beta}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, nous en déduisons :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

7. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Comme les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont des termes strictement positifs, nous en déduisons que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}.$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est donc décroissante. Ainsi est-elle majorée par son premier terme, i.e. :

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}.$$

En posant $M := \max \left\{ \frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \dots, \frac{u_{n_0-1}}{v_{n_0-1}}, \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \right\}$, il vient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$$

d'où $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

Soit β un réel tel que $1 < \beta < \alpha$, par exemple $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{n^\beta}.$$

D'après Q6 :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \beta - \alpha + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta - \alpha < 0.$$

Donc $n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$, et par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$, est négatif à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

à partir d'un certain rang.

D'après Q7 :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n).$$

La série à termes positifs $\sum v_n$ est convergente (critère de Riemann, $\beta > 1$). Par théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente.

9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose cette fois qu'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Soit β un réel tel que $\alpha < \beta < 1$, par exemple $\beta = \frac{\alpha + 1}{2}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{n^\beta}.$$

D'après 6 :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \beta - \alpha + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta - \alpha > 0.$$

Donc $n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$, et par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$, est positif à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

à partir d'un certain rang.

D'après 7 :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n).$$

Si la série à termes positifs $\sum u_n$ converge, alors, par théorème de comparaison, la série $\sum v_n$ est (absolument) convergente. Contradiction (critère de Riemann, $\beta < 1$).

La série $\sum u_n$ diverge donc.

10. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$.

Posons $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n} = \left(1 + \frac{a}{n}\right) \frac{1}{1 + \frac{b}{n}}.$$

Nous rappelons :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x).$$

Comme $\frac{b}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, nous en déduisons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{b-a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Si $b - a > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge d'après 8.
- Si $b - a < 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge d'après 9. Nous avons établi le résultat pour $0 < \alpha < 1$, mais les mêmes arguments livrent le résultat pour $\alpha < 1$, possiblement négatif.
- Il reste à étudier le cas où $b - a = 1$, i.e. $b = a + 1$. Remarquant un télescopage, nous obtenons, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{a+k+1} = \frac{a}{a+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{n} > 0.$$

Comme la série harmonique diverge, le théorème de sommation des équivalents livre la divergence de la série à termes positifs $\sum u_n$.

4. Transformée d'Abel

11. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \quad [\text{transformation d'Abel}].$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} + A_n b_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k'=1}^n A_{k'-1} b_{k'} + A_n b_n \quad [\text{changement d'indice } k' = k+1] \\ &= A_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} b_k - A_{n-1} b_n + A_n b_n \\ &= \underbrace{A_0}_{a_0} b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(A_k - A_{k-1})}_{a_k} b_k + \underbrace{(A_n - A_{n-1})}_{a_n} b_n \\ &= \sum_{k=0}^n a_k b_k \end{aligned}$$

Remarque (transformation d'Abel vs. intégration par parties). — De la même manière que les suites peuvent être vues comme des analogues discrets des fonctions, la transformation d'Abel (cf. formule établie ci-dessus) peut être considérée comme un analogue discret de la formule d'intégration par parties. Nous tentons d'expliquer plus précisément cette analogie ci-dessous.

- *Reformulation de la formule d'intégration par parties.* — Soient α et β des nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Soit $a : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $b : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si A désigne une primitive de a sur $[\alpha, \beta]$, alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(t)b(t) \, dt = [A(t)b(t)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} A(t)b'(t) \, dt.$$

- *Discrétisation de la notion de dérivée.* — Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, on définit la suite u' par :

$$u' := (u_n - u_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$$

en convenant que $u_{-1} := 0$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u'_n := u_n - u_{n-1} = \frac{u_n - u_{n-1}}{n - (n-1)}.$$

Nous reconnaissons un taux d'accroissement.

- *Discrétisation de la notion d'intégrale.* — La somme $\sum$ peut être vue comme un analogue discret de l'intégrale $\int$. Le lien est en fait bien plus profond, puisque la construction de l'intégrale de Riemann s'appuie

sur des sommes (d'aires de rectangles). Il existe d'ailleurs une autre notion d'intégrale, due à Lebesgue, qui permet de considérer des sommes finies comme des intégrales (point de vue très fécond, mais hors programme).

- *Version discrète du théorème fondamental de l'analyse.* — Nous remarquons que si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^n u'_k.$$

- *Discretisation de la notion de primitive..* — Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, on définit la suite U par :

$$U := \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Nous observons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U'_n = U_n - U_{n-1} = u_n.$$

Nous pouvons reformuler la transformation d'Abel :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_{k+1}$$

et mieux mesurer l'analogie entre transformation d'Abel et formule d'intégration par parties.

Formule d'intégration par parties	$\int_a^\beta a(t)b(t) dt = [A(t)b(t)]_a^\beta - \int_a^\beta A(t)b'(t) dt$
Transformation d'Abel	$\sum_{k=0}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_{k+1}$

12. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telles que :

(H1) la suite de terme général $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$ est bornée ;

(H2) la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n. \quad (1)$$

- *La série $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ est (absolument) convergente.* — La suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |A_k| \leq M.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M |b_k - b_{k+1}| = M (b_k - b_{k+1})$$

car la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est à termes réels et décroissante.

Comme la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, la série télescopique $\sum b_k - b_{k+1}$ est convergente.

Par linéarité, la série $\sum M(b_k - b_{k+1})$ converge.

D'après le théorème de domination pour les séries à termes positifs, la série $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolument, donc converge.

Par définition même, la suite de ses sommes partielles converge. Donc, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell. \quad (2)$$

- La suite $(A_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |A_n b_n| \leq M b_n.$$

Comme la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, le théorème d'encadrement nous livre $|A_n b_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc :

$$A_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (3)$$

- Conclusion. — De (1), (2) et (3), nous déduisons :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ converge, donc la série $\sum a_n b_n$ converge.

Remarque (résultat de Q12 vs. critère spécial des séries alternées). — La question Q12 permet de redémontrer la convergence d'une série vérifiant les hypothèses du critère spécial des séries alternées (mais pas les inégalités, ni les majorations des restes en valeur absolue, qui sont également importantes). En effet, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} u_n \leq 0$;
- la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
- la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Introduisons la fonction signe définie par :

$$\text{sgn} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \{ -1, 0, 1 \} \\ x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \text{sgn}(u_n) |u_n|$. Comme la suite $(\text{sgn}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse (H1) de la Q12 et comme la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse (H2) de la question Q12, on redémontre la convergence de la série $\sum \underbrace{\text{sgn}(u_n) |u_n|}_{u_n}$ en appliquant le résultat de la question Q12.

13. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ diverge. Démontrer que, pour tout $\alpha < 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^\alpha} \text{ diverge.}$$

Nous raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\alpha \leq 1$ tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_n}{n^\alpha} \times \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Vérifions les hypothèses (H1) et (H2) de Q12.

(H1) La série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ étant convergente, la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est convergente, donc bornée.

(H2) Comme $1 - \alpha > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

Le résultat de Q12 s'applique donc et nous livre la convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n}$, d'où une contradiction.

14. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0 [2\pi]$. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.

• La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\cos(n\theta)}{n} = \cos(n\theta) \times \frac{1}{n}.$$

Vérifions les hypothèses (H1) et (H2) de Q12.

(H1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \quad [\text{car } e^{i\theta} \neq 1, \text{ cf. } \theta \neq 0 [2\pi]] \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \frac{-2i e^{i\frac{n\theta}{2}} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{-2i e^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \quad [\text{par factorisation par l'angle moitié}] \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) \right| \leq \underbrace{\frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|}}_{\text{indépendant de } n}.$$

De cette étude, nous déduisons que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \cos(k\theta)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

(H2) La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

Le résultat de Q12 s'applique donc et nous livre la convergence de la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

• La série $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\cos(n\theta)}{n} \right|$ diverge. — Nous raisonnons par l'absurde et supposons que la série $\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n}$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $|\cos(n\theta)| \leq 1$, $\cos^2(n\theta) \leq |\cos(n\theta)|$, donc :

$$0 \leq \frac{\cos^2(n\theta)}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2n\theta)}{n} \leq \frac{|\cos(n\theta)|}{n}.$$

Par théorème de domination pour les séries à termes positifs :

$$\text{la série } \sum \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2n\theta)}{n} \text{ converge.} \quad (4)$$

Nous scindons alors l'étude en deux parties.

— Cas où $2\theta \not\equiv 0 [2\pi]$. D'après le point précédent, la série $\frac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge. À l'aide de (4) et des résultats de linéarité sur les séries convergentes, nous en déduisons que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge.

— Cas où $2\theta \equiv 0 [2\pi]$. Le résultat (4) se ré-écrit alors : la série $\sum \frac{1}{n}$ converge.

Dans les deux cas, nous concluons à la convergence de la série harmonique, que l'on sait être divergente, d'où une contradiction.

15. Soient θ et α des nombres réels. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

- Cas où $\alpha \leq 0$. — Alors $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| = n^{-\alpha}$ ne tend pas vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est donc grossièrement divergente.
- Cas où $\alpha > 0$ et $\theta \equiv 0 [2\pi]$. — Dans ce cas, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est une série de Riemann. Elle converge donc si et seulement si $\alpha > 1$.
- Cas où $\alpha > 0$ et $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$. — La série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si les deux séries :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$$

convergent. En suivant la démarche exposée dans Q14, nous démontrons que les deux séries précédentes convergent et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

5. Lemme de Cesàro [ÉNS-MPI-2024]

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

À toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E , ce que l'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par :

$$\forall n \geq 0 \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

et la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des écarts définie par :

$$\forall n \geq 0 \quad e_n = u_{n+1} - u_n.$$

À toute série $\sum_{n \geq 0} a_n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par :

$$\forall n \geq 0 \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$$

et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Nous nous proposons de démontrer le lemme de Cesàro, voir Q16, d'en proposer des applications et d'établir certaines variantes puis des réciproques partielles.

5.1. Énoncé et démonstration du théorème

16. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \right). \quad (\text{Cesàro})$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

- Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Puisque $u_n - \ell = o(1)$ et que $\sum 1$ est une série divergente à termes positifs, on sait que $\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = o(n+1)$, i.e. que $(n+1)(\sigma_n - \ell) = o(n+1)$.

Ainsi (σ_n) converge vers ℓ si (u_n) converge vers ℓ .

- Supposons maintenant que la suite de nombres réels (u_n) tende vers $+\infty$.

Alors $1 = o(u_n)$ et $\sum u_n$ est une série (grossièrement) divergente à termes positifs (à partir d'un certain rang).

On en déduit que $\sum_{k=0}^n 1 = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$, i.e. que $n+1 = o((n+1)\sigma_n)$, ce qui montre que la suite $(|\sigma_n|)$ tend vers $+\infty$.

Or, comme $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ donc $\sigma_n \geq 0$ à partir d'un certain rang.

On en déduit que (σ_n) tend vers $+\infty$ si (u_n) tend vers $+\infty$.

- En considérant la suite $(-u_n)$, on montre que (σ_n) tend vers $-\infty$ si (u_n) tend vers $-\infty$.

5.2. Applications

17. En utilisant (Cesàro), calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn}$.

Puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $(v_n)_{n \geq 1}$.

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le lemme de Cesàro assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = 0$, i.e. (v_n) converge vers 0.

- Soient n et k des éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Pour tout $t \in [k-1, k]$, $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k-1}$ donc, en intégrant sur le segment $[k-1, k]$, il vient :

$$\frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1) \leq \frac{1}{k-1}.$$

En sommant la première majoration pour k variant de 2 à n et la seconde pour k variant de 2 à $n+1$, on

obtient $\ln(n+1) \leq nv_n \leq \ln n + 1$, donc $\ln n \leq nv_n \leq \ln n + 1$ puis :

$$1 \leq \frac{nv_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Le théorème des gendarmes assure alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nv_n}{\ln n} = 1$, i.e. $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

18. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \alpha$.

En utilisant (Cesàro), donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Retrouver ce résultat par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.

- Comme la suite (e_n) converge vers α , le lemme de Cesàro assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e_k = \alpha$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - u_0}{n} = \alpha$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{n} = 0$.

Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha$, donc, comme $\alpha \neq 0$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n$.

- Puisque $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha$ et que $\sum \alpha$ est une série (grossièrement) divergente dont les termes gardent un signe constant, on sait que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha$$

i.e. $u_n - u_0 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n$. En particulier $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$ donc $u_n - u_0 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

Finalement, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n$.

19. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

Traisons les cas $\ell \in]0, +\infty[$, $\ell = 0$ et $\ell = +\infty$ ensemble en décrétant que $\ln(0) = -\infty$ et que $\ln(+\infty) = +\infty$ et en supposant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

Avec notre convention, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(\ell)$ donc d'après le lemme de Cesàro :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(\ell)$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n) - \ln(u_0)}{n} = \ln(\ell)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_0)}{n} = 0$.

Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln(\ell)$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt[n]{u_n}) = \ln(\ell)$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

En considérant la suite $(n!)$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Enfin, comme :

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(1 + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e + o(1)$$

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{n!}} = e$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$.

20. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = ab.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - a$ et $v_n = b_n - b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (a + u_k)(b + v_{n-k}) = ab + \frac{a}{n} \sum_{k=0}^n v_k + \frac{b}{n} \sum_{k=0}^n u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, le lemme de Cesàro assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n v_k = 0$.

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k = 0$.

Montrons pour finir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, elles sont bornées : on dispose de $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$ et $|v_n| \leq \varepsilon$.

Pour tout $n \geq 2n_0$, on a donc :

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k| |v_{n-k}| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n |u_k| |v_{n-k}| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} M \times \varepsilon + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n \varepsilon \times M = M \varepsilon$$

ce qui montre par définition de la limite (rappelons que le réel M ne dépend pas de ε) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = 0$$

puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = 0$.

Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = ab$.

21. Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries de nombres complexes, convergentes de sommes respectives A et B . On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

la suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées définie par $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$.

Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k \right) = AB. \quad (\text{Cauchy})$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

D'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k} = AB$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k} &= \sum_{\substack{(k,\ell) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ k+\ell=n}} A_k B_\ell = \sum_{\substack{(k,\ell) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ k+\ell=n}} \sum_{\substack{i \in \llbracket 0,n \rrbracket \\ i \leq k}} \sum_{\substack{j \in \llbracket 0,n \rrbracket \\ j \leq \ell}} a_i b_j = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ i+j \leq n}} a_i b_j \sum_{\substack{(k,\ell) \in \llbracket i,n \rrbracket \times \llbracket j,n \rrbracket \\ k+\ell=n}} 1 \\
 &= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ i+j \leq n}} \text{Card}(\{(k,\ell) \in \llbracket i,n \rrbracket \times \llbracket j,n \rrbracket ; k+\ell=n\}) a_i b_j \\
 &= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ i+j \leq n}} \text{Card}(\{(k, n-k) ; k \in \llbracket i, n-j \rrbracket\}) a_i b_j \\
 &= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ i+j \leq n}} (n-i-j+1) a_i b_j
 \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=0}^n C_k = \sum_{k \in \llbracket 0,n \rrbracket} \sum_{\substack{\ell \in \llbracket 0,n \rrbracket \\ \ell \leq k}} \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ i+j=\ell}} a_i b_j = \sum_{k \in \llbracket 0,n \rrbracket} \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ i+j \leq k}} a_i b_j = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ i+j \leq n}} a_i b_j \sum_{\substack{k \in \llbracket 0,n \rrbracket \\ k \geq i+j}} 1 = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2 \\ i+j \leq n}} (n-i-j+1) a_i b_j.$$

$$\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k.$$

$$\text{On conclut que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k = AB.$$

5.3. Réciproques partielles

22. Vérifier que la réciproque de (Cesàro) n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Considérons la suite $(u_n) = ((-1)^n)$.

Alors la suite (u_n) ne converge pas et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ et $\sigma_{2n+1} = 0$, la suite (σ_n) converge (vers 0).

23. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monotone} \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right).$$

Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Supposons d'emblée que $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, que (σ_n) tend vers ℓ et que (u_n) est monotone.

Cette dernière hypothèse assure que (u_n) tend vers une limite $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, donc d'après (Cesàro), (σ_n) tend vers ℓ' .

Comme (σ_n) tend vers ℓ , l'unicité de la limite assure que $\ell' = \ell$ donc (u_n) tend vers ℓ .

24. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right). \quad (\text{Hardy faible})$$

Indication : on pourra démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k$.

L'indication peut se montrer via un calcul direct mais une récurrence immédiate donne le résultat encore plus rapidement : l'initialisation vient de la définition de e_1 et si $n \geq 1$ est tel que $\sum_{k=0}^n ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k + (n+1)e_{n+1} = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k + (n+1)(u_{n+2} - u_{n+1}) = (n+1)u_{n+2} - \sum_{k=1}^n u_k - u_{n+1}$$

ce qui prouve l'hérédité.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k$.

Supposons maintenant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} ne_n = 0$.

Alors d'après ce qui précède, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} ke_k + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} u_k = \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} ke_k + \frac{n}{n-1} \times \sigma_{n-1} - \frac{u_0}{n-1}.$$

Or, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} ne_n = 0$, le lemme de Cesàro assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} ke_k = 0$.

Comme d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{n-1} = \ell$, on en déduit finalement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but des trois questions suivantes est de démontrer que :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right). \quad (\text{Hardy fort})$$

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

25. Soit $0 \leq n < m$. Démontrer que :

$$\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j.$$

Ici encore, un calcul direct peut aboutir mais une récurrence sur $m \geq n+1$ (à $n \in \mathbb{N}$ fixé) donne le résultat plus rapidement : l'initialisation vient de la définition de e_n et si $m \geq n+1$ est tel que $\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j$ (remarquons que cette dernière somme peut aussi s'arrêter à $j=m$), alors :

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} u_k - (m+1-n)u_n = u_{m+1} - u_n + \sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^m (u_{j+1} - u_j) + \sum_{j=n}^m (m-j)e_j = \sum_{j=n}^m (e_j + (m-j)e_j)$$

ce qui prouve l'hérédité.

Finalement, pour tous $n \geq 0$ et $m > n$, $\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j$.

26. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leq n < m$ on a :

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$$

et

$$|u_n - \ell| \leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n} (|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

Soit n et m des entiers tels que $2 \leq n < m$.

Remarquons que $(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n = \sum_{k=n+1}^m u_k$ donc, d'après la question précédente :

$$\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n = \frac{1}{m-n} \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j$$

donc :

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq \frac{1}{m-n} \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)|e_j| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |e_j|.$$

Or, comme $e_j \underset{j \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{j}\right)$, on dispose d'une constante $C > 0$ (qui ne dépend donc pas de n ni de m) telle que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $|e_j| \leq \frac{C}{j}$.

En exploitant l'inégalité :

$$\forall j \geq 2 \quad \frac{1}{j} \leq \ln(j) - \ln(j-1)$$

établie à la Q17 (on peut aussi montrer cette inégalité en exploitant la concavité du logarithme), on a donc finalement :

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{C}{j} \leq C \sum_{j=n}^{m-1} (\ln j - \ln(j-1)) = C(\ln(m-1) - \ln(n-1)) = C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right).$$

D'où, en notant $C = 1 + \sup_{j \in \mathbb{N}^*} (j|e_j|) > 0$, on a, pour tous $m > n \geq 2$, $\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$.

Soit n et m des entiers tels que $2 \leq n < m$. On écrit :

$$u_n - \ell = u_n - \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} + \frac{(m+1)(\sigma_m - \ell) - (n+1)(\sigma_n - \ell)}{m-n}.$$

donc, d'après ce qui précède :

$$|u_n - \ell| \leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (n+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n} \leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (n+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n}$$

donc pour tous $n \geq 2$ et $m > n$, $|u_n - \ell| \leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|)$.

27. En déduire (Hardy fort). Indication : on pourra prendre $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ avec un paramètre $\alpha > 1$ à choisir, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

Soit $\alpha > 1$ (que l'on choisira ultérieurement).

Posons pour tout $n \geq 2$, $m_n = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ (remarquons que $m_n > \alpha n > n$ et que m_n est un entier).

D'après la question précédente, pour tout $n \geq 2$, on a donc :

$$|u_n - \ell| \leq C \ln\left(\frac{m_n-1}{n-1}\right) + \frac{m_n+1}{m_n-n}(|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

Or, $m_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{m_n-1}{n-1}\right) = \ln \alpha$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_n+1}{m_n-n} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{m_n} = \ell$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C \ln\left(\frac{m_n-1}{n-1}\right) + \frac{m_n+1}{m_n-n}(|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|) = C \ln \alpha.$$

Comme $C \ln \alpha < 2C \ln \alpha$, on dispose donc de $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$C \ln\left(\frac{m_n-1}{n-1}\right) + \frac{m_n+1}{m_n-n}(|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|) \leq 2C \ln \alpha \quad \text{donc} \quad |u_n - \ell| \leq 2C \ln \alpha.$$

Finalement, pour tout $\alpha > 1$, il existe $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq 2C \ln \alpha$.

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\alpha = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right) > 1$, il existe $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$|u_n - \ell| \leq 2C \ln \alpha = \varepsilon$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

6. Surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$

28. Démontrer que l'application :

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_2(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \exp(M) \end{array} \right.$$

est bien définie et surjective.

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- *Le spectre de A ne contient pas 0.* — Remarquons déjà que 0 ne peut être valeur propre de A .
- *Un nombre complexe non nul est l'exponentielle d'un nombre complexe.* — Ensuite, si λ est un nombre complexe non nul, alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda = r e^{i\theta} = e^{\ln(r) + i\theta}.$$

Un nombre complexe non nul est donc toujours l'exponentielle d'un nombre complexe.

- *Cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.* — Supposons A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Il existe donc une matrice $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ et des nombres complexes non nuls λ_1, λ_2 tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Comme λ_1 et λ_2 sont non nuls, il existe des complexes α_1, α_2 tels que $\lambda_1 = e^{\alpha_1}$ et $\lambda_2 = e^{\alpha_2}$.
Alors, d'après le cours :

$$A = P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} \end{pmatrix} P^{-1} = P \exp \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \right) P^{-1} = \exp \left(P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1} \right).$$

La matrice A est donc l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- *Cas où A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.* — Supposons A est non diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Alors A possède une unique valeur propre complexe λ (non nulle) et, comme toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ et un nombre complexe μ (non nul) tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Puisque λ est non nul, il existe un nombre complexe α tel que $\lambda = e^{\alpha}$. Ainsi :

$$A = P \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \mu \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} P^{-1}. \quad (5)$$

Considérons un complexe β . Les matrices :

$$D := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N := \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

commutent. De plus $N^2 = 0$. Nous en déduisons que :

$$\exp \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right) = \exp(D + N) = \exp(D) \exp(N) = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \beta e^{\alpha} \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Par suite :

$$\exp \left(\begin{pmatrix} \alpha & e^{-\alpha} \mu \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \mu \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} \quad (6)$$

D'après (5), (6) et le cours :

$$A = P \begin{pmatrix} e^\alpha & \mu \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} P^{-1} = P \exp \left(\begin{pmatrix} \alpha & e^{-\alpha} \mu \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right) P^{-1} = \exp \left(P \begin{pmatrix} \alpha & e^{-\alpha} \mu \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} \right).$$

La matrice A est donc l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.