

Devoir surveillé n°4 — piste vermillon

samedi 29 novembre de 8h00 à 12h00

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

1. Questions de cours	1
2. Natures et sommes éventuelles de séries	1
3. Règle de Raabe-Duhamel	1
4. Transformée d'Abel	2
5. Lemme de Cesàro	2
5.1. Énoncé et démonstration du théorème	3
5.2. Applications	3
5.3. Réciproques partielles	3
6. Surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$	4

1. Questions de cours

- Rappeler la définition de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Donner la valeur de $\exp(A)$ dans le cas où $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Énoncer la règle de d'Alembert pour les séries numériques et démontrer le résultat dans le cas où $\ell < 1$.
- Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?
- Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la famille $\left(\frac{1}{n^\alpha + m^\alpha} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

2. Natures et sommes éventuelles de séries

- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme, à l'aide de $\zeta(2) := \frac{\pi^2}{6}$.
- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge et calculer sa somme.
- Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$.
- Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$.

3. Règle de Raabe-Duhamel

- Soit β un nombre réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Former un développement asymptotique du quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose cette fois qu'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ diverge.

10. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$.

4. Transformée d'Abel

11. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \quad [\text{transformation d'Abel}].$$

12. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telles que :

(H1) la suite de terme général $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$ est bornée ;

(H2) la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

13. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ diverge. Démontrer que, pour tout $\alpha < 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^\alpha} \text{ diverge.}$$

14. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.

15. Soient θ et α des nombres réels. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

5. Lemme de Cesàro

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

À toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E , ce que l'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par :

$$\forall n \geq 0 \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

et la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des écarts définie par :

$$\forall n \geq 0 \quad e_n = u_{n+1} - u_n.$$

À toute série $\sum_{n \geq 0} a_n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par :

$$\forall n \geq 0 \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$$

et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Nous nous proposons de démontrer le lemme de Cesàro, voir Q16, d'en proposer des applications et d'établir certaines variantes puis des réciproques partielles.

5.1. Énoncé et démonstration du théorème

16. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \right). \quad (\text{Cesàro})$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

5.2. Applications

17. En utilisant (Cesàro), calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn}$.

Puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $(v_n)_{n \geq 1}$.

18. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \alpha$.

En utilisant (Cesàro), donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Retrouver ce résultat par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.

19. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

20. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = ab.$$

21. Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries de nombres complexes, convergentes de sommes respectives A et B . On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

la suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées définie par $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$.

Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k \right) = AB. \quad (\text{Cauchy})$$

5.3. Réciproques partielles

22. Vérifier que la réciproque de (Cesàro) n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

23. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monotone} \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right).$$

Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

24. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right). \quad (\text{Hardy faible})$$

Indication : on pourra démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k$.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but des trois questions suivantes est de démontrer que :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right). \quad (\text{Hardy fort})$$

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.

25. Soit $0 \leq n < m$. Démontrer que :

$$\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j.$$

26. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leq n < m$ on a :

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$$

et

$$|u_n - \ell| \leq C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n} (|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

27. En déduire (Hardy fort). Indication : on pourra prendre $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ avec un paramètre $\alpha > 1$ à choisir, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

6. Surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$

28. Démontrer que l'application :

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_2(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \exp(M) \end{array} \right.$$

est bien définie et surjective.