

Un corrigé du devoir surveillé n°4 — piste turquoise

1. Questions de cours	1
2. Natures et sommes éventuelles de séries	1
3. Autour du théorème de comparaison avec une intégrale [CCINP-MPI-2025]	3
3.1. Théorème de comparaison avec une intégrale	3
3.2. Applications	4
3.3. Contre-exemples	6
4. Règle de Raabe-Duhamel	8
5. Transformée d'Abel	10
6. Surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$	15

1. Questions de cours

- Rappeler la définition de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Donner la valeur de $\exp(A)$ dans le cas où $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Énoncer la règle de d'Alembert pour les séries numériques et démontrer le résultat dans le cas où $\ell < 1$.
- Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?
- Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la famille $\left(\frac{1}{n^\alpha + m^\alpha} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

2. Natures et sommes éventuelles de séries

- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme, à l'aide de $\zeta(2) := \frac{\pi^2}{6}$.

On décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2(X+1)^2}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2(X+1)^2} = -\frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2} &= -2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= 2 \left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= 2 \left(\frac{1}{n+1} - 1 \right) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - 3 \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 3. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$.

- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge et calculer sa somme.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln(k-1) + \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k).$$

Après télescopes :

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(n) - \ln(2) + \ln(n+1) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2).$$

Donc la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$.

3. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Nous savons :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = e \left(e^{-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}\right) = e \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme :

- $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e}{2n} \geq 0$;
- la série harmonique diverge ;

le théorème de comparaison livre la divergence de la série $\sum_{n \geq 2} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

4. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}$.

Les croissances comparées des fonctions puissances et logarithme livrent :

$$\frac{1}{n^{3/4}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}\right).$$

Supposons que la série à termes positifs $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}$ converge. Par théorème de comparaison, la série $\sum \frac{1}{n^{3/4}}$ est alors (absolument) convergente, ce qui contredit le critère de Riemann.

La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}$ est donc divergente.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$.

- Cas où $x = 0$. — La série converge pour $x = 0$.

- Cas où $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. — Supposons $x \neq 0$ et posons, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n(x) := \frac{\ln(n)}{n^2} x^n \neq 0.$$

Comme :

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n)).$$

il vient :

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{\ln(n+1)n^2}{\ln(n)(n+1)^2} |x| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$.

- Cas où $x \in \{-1, 1\}$. — Si $x \in \{-1, 1\}$, alors :

$$|u_n(x)| = \frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

d'après les croissances comparées. Comme :

- $|u_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$;
- pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$;
- la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (critère de Riemann) ;

le théorème de comparaison livre que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$ est absolument convergente.

3. Autour du théorème de comparaison avec une intégrale [CCINP-MPI-2025]

Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des applications. On terminera par deux contre-exemples.

3.1. Théorème de comparaison avec une intégrale

Dans cette partie, f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$, $J_n = \int_0^n f(t) dt$ et pour tout entier k non nul, $I_k = \int_{k-1}^k f(t) dt$.

6. Préciser la monotonie des suites $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$, puis démontrer que pour tout entier k non nul :

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1).$$

Comme f est positive, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geq 0$ et $J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} f \geq 0$ (on utilise là la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale). On en déduit que les suites $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont croissantes. Ensuite, par décroissance de f sur $[k-1, k]$, on a pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dt = f(k-1)$$

d'où le résultat : $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$.

L'hypothèse de continuité intervient pour assurer la convergence de toutes ces intégrales sur des segments.

7. Démontrer que pour tout entier n non nul, $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme de $k = 1$ à $k = n$ l'encadrement de la question précédente et on utilise la relation de Chasles. On obtient :

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

d'où le résultat : $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.

8. Démontrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, si et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.

• *Implication directe.* — Supposons f intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par positivité, on a pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$S_n \stackrel{(7)}{\leq} J_n + f(0) \leq \int_0^{+\infty} f + f(0) < +\infty.$$

Ainsi la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (Q6) et majorée : elle converge, c'est-à-dire la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.

• *Implication réciproque.* — Notons que f est bien continue sur $\mathbb{R}_+$. Réciproquement, si la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge, alors par positivité de f (qui autorise les calculs dans $[0, +\infty]$) on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f| = \int_{\mathbb{R}_+} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n.$$

Par la question précédente et convergence de la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$, on a les inégalités suivantes en passant à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(k) < +\infty$$

donc : $\int_{\mathbb{R}_+} |f| < +\infty$, ce qui démontre l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

9. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge.

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et minorée par 0 : elle admet donc une limite finie en $+\infty$.

Par Q6, le terme général de cette série est positif, ce qui autorise le calcul suivant dans $[0, +\infty]$ (encore justifié par Q6), qui fait apparaître une somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n-1) - f(n)) = f(0) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f < +\infty,$$

donc la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge : d'où le résultat.

3.2. Applications

On pose pour tout $\alpha > 0$ et $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.

10. Étudier la monotonie de la fonction f , calculer $\int_2^x f(t) dt$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

Comme $\alpha > 0$, la fonction f est décroissante en tant que produit des fonctions décroissantes et positives $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{(\ln(x))^\alpha}$.

Elle est aussi continue et positive sur $\mathbf{R}_+$. On a en outre, pour tout $x \geq 2$:

$$\int_2^x \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln(|\ln(t)|)]_2^x = \ln(|\ln(x)|) - \ln(\ln(2)),$$

tandis que, si $\alpha \neq 1$, nous avons, pour tout $x \geq 2$:

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha} = \left[-\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(\ln(t))^{\alpha-1}} \right]_2^x = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(\ln(2))^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln(x))^{\alpha-1}} \right).$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-1)(\ln(2))^{\alpha-1}} < +\infty & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Comme f est positive, cela démontre qu'elle est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si : $\alpha > 1$.

Par la question précédente, dont toutes les hypothèses sont vérifiées (pour se ramener à $\mathbf{R}_+$, il suffit de considérer la fonction translatée $x \mapsto f(x+2)$, ce qui ne change rien à la nature des intégrales et séries en jeu), la série

$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

11. Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln(2)$, un encadrement de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

Si $\alpha = 2$, alors Q7 (où l'on considère encore la fonction translatée $x \mapsto f(x+2)$ pour se ramener à $\mathbf{R}_+$) donne :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\} \quad \int_2^{n+1} \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leq \int_2^n \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx + \frac{1}{2(\ln(2))^2}$$

et donc, quand $n \rightarrow +\infty$, par le calcul de la question précédente :

$$\frac{1}{\ln(2)} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leq \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2(\ln(2))^2}.$$

On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

12. En utilisant Q9, établir que la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge. On notera γ sa limite (constante d'Euler).

Pour tout n au voisinage de l'infini on a :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 - \sum_{k=2}^n \left(\int_{k-1}^k \frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right).$$

En appliquant la question 8 à la fonction continue, positive et décroissante $x \mapsto \frac{1}{x}$ (ou plutôt à sa translatée $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ qui vérifie les mêmes hypothèses sur $\mathbf{R}_+$), la série $\sum_{k \geq 2} \left(\int_{k-1}^k \frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right)$ converge, ce qui démontre la convergence de la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}}$. D'où le résultat.

13. Justifier que, au voisinage de $+\infty$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et en déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Par la question précédente :

$$T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \gamma + o(1)$$

donc par définition de T_n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Comme le logarithme tend vers l'infini en l'infini, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

3.3. Contre-exemples

On pose pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

14. Calculer, pour n entier naturel non nul, $\int_n^{n+1} f(t) dt$. On pourra remarquer que :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t) dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons que le sinus est positif sur $[0, \pi]$ et négatif sur $[\pi, 2\pi]$.

Par périodicité, $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est positive sur $\left[n, n + \frac{1}{2}\right]$ et négative sur $\left[n + \frac{1}{2}, n + 1\right]$.

On a alors, par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} f &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} f + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f \\ &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi x) dx - \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \sin(2\pi x) dx \\ &= \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} \right]_n^{n+\frac{1}{2}} - \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} \right]_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &= -\frac{\cos(2\pi n + \pi)}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi n)}{2\pi} - \left(-\frac{\cos(2\pi(n+1))}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi n + \pi)}{2\pi} \right) \\ &= -\frac{-1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \left(-\frac{1}{2\pi} + \frac{-1}{2\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x .

15. Établir que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x |\sin(2\pi t)| dt \geq \frac{2}{\pi} (\lfloor x \rfloor - 1).$$

La fonction f est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Que dire de la nature de la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$?

Soit $x \in [1, +\infty[$. Par positivité de l'intégrande, on a :

$$\int_1^x |\sin(2\pi t)| dt \geq \int_1^{\lfloor x \rfloor} |\sin(2\pi t)| dt = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_n^{n+1} |\sin(2\pi t)| dt \stackrel{(Q14)}{=} \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} (\lfloor x \rfloor - 1),$$

ce qui donne la minoration attendue.

Comme le minorant tend vers l'infini, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = +\infty$$

donc f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Or le sinus est nul en tous les multiples entiers de π , donc la série $\sum_{n \geq 1} f(n) = \sum_{n \geq 1} 0$ est trivialement convergente :

elle n'est pas de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$.

C'est bien sûr la monotonie de f qui ne permet pas d'appliquer Q8.

On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction f continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ telle que $\sum_{n \geq 1} f(n)$ diverge.

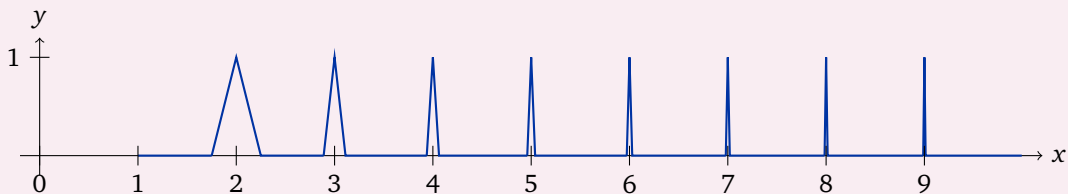
16. Pour tout entier n non nul, trouver un réel a_n de sorte que le triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 ait une aire égale à $\frac{1}{n^2}$.

Dessiner l'allure d'une courbe de fonction f définie et continue sur $[1, +\infty[$ de la manière suivante : chaque entier naturel n non nul a pour image 1 et autour de chaque n (sur chaque intervalle $[n - a_n, n + a_n]$) tracer l'allure du triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1. Enfin, la fonction est nulle en dehors de tous les intervalles $[n - a_n, n + a_n]$.

Démontrer que cette fonction f fournit un contre-exemple.

Il suffit de prendre $a_n = \frac{1}{n^2}$. La longueur de $[n - a_n, n + a_n]$ est alors égale à $\frac{2}{n^2}$, or l'aire du triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 est égale à la longueur de la base fois la hauteur divisée par 2 : son aire est bien égale à $\frac{1}{n^2}$.

Voici le graphe de la fonction décrite par l'énoncé. Du moins, nous ne respectons la description que pour $n \geq 2$, car les intervalles $[1 - a_1, 1 + a_1]$ et $[2 - a_2, 2 + a_2]$ ne sont pas disjoints (on a $1 + a_1 = 2$) : nous posons la fonction comme étant nulle sur $[1, 2 - a_2]$. Ceci étant dit :



Cette fonction est continue et positive. On a dans $[0, +\infty]$:

$$\int_1^{+\infty} f = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-a_n}^{n+a_n} f = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

puisque l'on reconnaît une série de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1.

Pourtant, toujours dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{+\infty} 1 = +\infty,$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ n'ont pas la même nature.

C'est bien sûr la monotonie de f qui est encore mise en défaut.

4. Règle de Raabe-Duhamel

17. Soit β un nombre réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Former un développement asymptotique du quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\beta = \exp\left(\beta \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

Nous rappelons :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x).$$

Comme $-\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, nous en déduisons :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Nous rappelons :

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x).$$

Comme $-\frac{\beta}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, nous en déduisons :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

18. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Comme les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont des termes strictement positifs, nous en déduisons que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}.$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est donc décroissante. Ainsi est-elle majorée par son premier terme, i.e. :

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}.$$

En posant $M := \max\left\{\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \dots, \frac{u_{n_0-1}}{v_{n_0-1}}, \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\right\}$, il vient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$$

d'où $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

19. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

Soit β un réel tel que $1 < \beta < \alpha$, par exemple $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{n^\beta}.$$

D'après Q17 :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \beta - \alpha + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta - \alpha < 0.$$

Donc $n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$, et par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$, est négatif à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

à partir d'un certain rang.

D'après Q18 :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n).$$

La série à termes positifs $\sum v_n$ est convergente (critère de Riemann, $\beta > 1$). Par théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente.

20. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose cette fois qu'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Soit β un réel tel que $\alpha < \beta < 1$, par exemple $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{n^\beta}.$$

D'après 17 :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \beta - \alpha + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta - \alpha > 0.$$

Donc $n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$, et par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$, est positif à partir d'un certain rang, i.e. :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

à partir d'un certain rang.

D'après 18 :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n).$$

Si la série à termes positifs $\sum u_n$ converge, alors, par théorème de comparaison, la série $\sum v_n$ est (absolument) convergente. Contradiction (critère de Riemann, $\beta < 1$).
La série $\sum u_n$ diverge donc.

21. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$.

Posons $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n}{b+n} = \left(1 + \frac{a}{n}\right) \frac{1}{1 + \frac{b}{n}}.$$

Nous rappelons :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x).$$

Comme $\frac{b}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, nous en déduisons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{b-a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Si $b - a > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge d'après 19.
- Si $b - a < 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge d'après 20. Nous avons établi le résultat pour $0 < \alpha < 1$, mais les mêmes arguments livrent le résultat pour $\alpha < 1$, possiblement négatif.
- Il reste à étudier le cas où $b - a = 1$, i.e. $b = a + 1$. Remarquant un télescopage, nous obtenons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{a+k+1} = \frac{a}{a+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{n} > 0.$$

Comme la série harmonique diverge, le théorème de sommation des équivalents livre la divergence de la série à termes positifs $\sum u_n$.

5. Transformée d'Abel

22. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \quad [\text{transformation d'Abel}].$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} + A_n b_n \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k'=1}^n A_{k'-1} b_{k'} + A_n b_n \quad [\text{changement d'indice } k' = k + 1] \\
 &= A_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} b_k - A_{n-1} b_n + A_n b_n \\
 &= \underbrace{A_0}_{a_0} b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(A_k - A_{k-1})}_{a_k} b_k + \underbrace{(A_n - A_{n-1})}_{a_n} b_n \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k b_k
 \end{aligned}$$

Remarque (transformation d'Abel vs. intégration par parties). — De la même manière que les suites peuvent être vues comme des analogues discrets des fonctions, la transformation d'Abel (cf. formule établie ci-dessus) peut être considérée comme un analogue discret de la formule d'intégration par parties. Nous tentons d'expliquer plus précisément cette analogie ci-dessous.

- *Reformulation de la formule d'intégration par parties.* — Soient α et β des nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Soit $a : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et soit $b : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si A désigne une primitive de a sur $[\alpha, \beta]$, alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(t)b(t) \, dt = [A(t)b(t)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} A(t)b'(t) \, dt.$$

- *Discrétisation de la notion de dérivée.* — Si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite, on définit la suite u' par :

$$u'_n := (u_n - u_{n-1})_{n \in \mathbf{N}}$$

en convenant que $u_{-1} := 0$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u'_n := u_n - u_{n-1} = \frac{u_n - u_{n-1}}{n - (n-1)}.$$

Nous reconnaissons un taux d'accroissement.

- *Discrétisation de la notion d'intégrale.* — La somme $\sum$ peut être vue comme un analogue discret de l'intégrale $\int$. Le lien est en fait bien plus profond, puisque la construction de l'intégrale de Riemann s'appuie sur des sommes (d'aires de rectangles). Il existe d'ailleurs une autre notion d'intégrale, due à Lebesgue, qui permet de considérer des sommes finies comme des intégrales (point de vue très fécond, mais hors programme).
- *Version discrète du théorème fondamental de l'analyse.* — Nous remarquons que si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite alors pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^n u'_k.$$

- *Discrétisation de la notion de primitive.* — Si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite, on définit la suite U par :

$$U := \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbf{N}}$$

de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Nous observons que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$U'_n = U_n - U_{n-1} = u_n.$$

Nous pouvons reformuler la transformation d'Abel :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_{k+1}$$

et mieux mesurer l'analogie entre transformation d'Abel et formule d'intégration par parties.

Formule d'intégration par parties	$\int_a^\beta a(t)b(t) dt = [A(t)b(t)]_a^\beta - \int_a^\beta A(t)b'(t) dt$
Transformation d'Abel	$\sum_{k=0}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_{k+1}$

23. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telles que :

(H1) la suite de terme général $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$ est bornée ;

(H2) la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n. \quad (1)$$

- La série $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ est (absolument) convergente. — La suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |A_k| \leq M.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M |b_k - b_{k+1}| = M (b_k - b_{k+1})$$

car la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est à termes réels et décroissante.

Comme la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, la série télescopique $\sum b_k - b_{k+1}$ est convergente.

Par linéarité, la série $\sum M (b_k - b_{k+1})$ converge.

D'après le théorème de domination pour les séries à termes positifs, la série $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ converge absolument, donc converge.

Par définition même, la suite de ses sommes partielles converge. Donc, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell. \quad (2)$$

- La suite $(A_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |A_n b_n| \leq M b_n.$$

Comme la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, le théorème d'encadrement nous livre $|A_n b_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc :

$$A_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (3)$$

- *Conclusion.* — De (1), (2) et (3), nous déduisons :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ converge, donc la série $\sum a_n b_n$ converge.

Remarque (résultat de Q23 vs. critère spécial des séries alternées). — La question Q23 permet de redémontrer la convergence d'une série vérifiant les hypothèses du critère spécial des séries alternées (mais pas les inégalités, ni les majorations des restes en valeur absolue, qui sont également importantes). En effet, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} u_n \leq 0$;
- la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
- la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Introduisons la fonction signe définie par :

$$\operatorname{sgn} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \{-1, 0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \operatorname{sgn}(u_n) |u_n|$. Comme la suite $(\operatorname{sgn}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse (H1) de la Q23 et comme la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse (H2) de la question Q23, on redémontre la convergence de la série $\sum \underbrace{\operatorname{sgn}(u_n)}_{u_n} |u_n|$ en appliquant le résultat de la question Q23.

24. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ diverge. Démontrer que, pour tout $\alpha < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^\alpha}$ diverge.

Nous raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\alpha \leq 1$ tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_n}{n^\alpha} \times \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Vérifions les hypothèses (H1) et (H2) de Q23.

(H1) La série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ étant convergente, la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est convergente, donc bornée.

(H2) Comme $1 - \alpha > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

Le résultat de Q23 s'applique donc et nous livre la convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n}$, d'où une contradiction.

25. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0 [2\pi]$. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.

- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\cos(n\theta)}{n} = \cos(n\theta) \times \frac{1}{n}.$$

Vérifions les hypothèses (H1) et (H2) de Q23.

(H1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \quad [\text{car } e^{i\theta} \neq 1, \text{ cf. } \theta \neq 0[2\pi]] \\
 &= \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \frac{-2i e^{i\frac{n\theta}{2}} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{-2i e^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \quad [\text{par factorisation par l'angle moitié}] \\
 &= \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) \right| \leq \frac{1}{\underbrace{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|}_{\text{indépendant de } n}}.$$

De cette étude, nous déduisons que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \cos(k\theta) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

(H2) La suite $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

Le résultat de Q23 s'applique donc et nous livre la convergence de la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

- La série $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\cos(n\theta)}{n} \right|$ diverge. — Nous raisonnons par l'absurde et supposons que la série $\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n}$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $|\cos(n\theta)| \leq 1$, $\cos^2(n\theta) \leq |\cos(n\theta)|$, donc :

$$0 \leq \frac{\cos^2(n\theta)}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2n\theta)}{n} \leq \frac{|\cos(n\theta)|}{n}.$$

Par théorème de domination pour les séries à termes positifs :

$$\text{la série } \sum \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2n\theta)}{n} \text{ converge.} \quad (4)$$

Nous scindons alors l'étude en deux parties.

- Cas où $2\theta \neq 0[2\pi]$. D'après le point précédent, la série $\frac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge. À l'aide de (4) et des résultats de linéarité sur les séries convergentes, nous en déduisons que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge.
- Cas où $2\theta \equiv 0[2\pi]$. Le résultat (4) se ré-écrit alors : la série $\sum \frac{1}{n}$ converge.

Dans les deux cas, nous concluons à la convergence de la série harmonique, que l'on sait être divergente, d'où une contradiction.

26. Soient θ et α des nombres réels. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

- Cas où $\alpha \leq 0$. — Alors $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| = n^{-\alpha}$ ne tend pas vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est donc grossièrement divergente.
- Cas où $\alpha > 0$ et $\theta \equiv 0 [2\pi]$. — Dans ce cas, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est une série de Riemann. Elle converge donc si et seulement si $\alpha > 1$.
- Cas où $\alpha > 0$ et $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$. — La série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si les deux séries :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$$

convergent. En suivant la démarche exposée dans Q25, nous démontrons que les deux séries précédentes convergent et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

6. Surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$

27. Démontrer que l'application :

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_2(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \exp(M) \end{array} \right.$$

est bien définie et surjective.

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- Le spectre de A ne contient pas 0. — Remarquons déjà que 0 ne peut être valeur propre de A .
- Un nombre complexe non nul est l'exponentielle d'un nombre complexe. — Ensuite, si λ est un nombre complexe non nul, alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda = r e^{i\theta} = e^{\ln(r) + i\theta}.$$

Un nombre complexe non nul est donc toujours l'exponentielle d'un nombre complexe.

- Cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. — Supposons A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Il existe donc une matrice $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ et des nombres complexes non nuls λ_1, λ_2 tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Comme λ_1 et λ_2 sont non nuls, il existe des complexes α_1, α_2 tels que $\lambda_1 = e^{\alpha_1}$ et $\lambda_2 = e^{\alpha_2}$.

Alors, d'après le cours :

$$A = P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} \end{pmatrix} P^{-1} = P \exp \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \right) P^{-1} = \exp \left(P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} P^{-1} \right).$$

La matrice A est donc l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- Cas où A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$. — Supposons A est non diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Alors A possède une unique valeur propre complexe λ (non nulle) et, comme toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ et un nombre complexe μ (non nul) tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Puisque λ est non nul, il existe un nombre complexe α tel que $\lambda = e^\alpha$. Ainsi :

$$A = P \begin{pmatrix} e^\alpha & \mu \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} P^{-1}. \quad (5)$$

Considérons un complexe β . Les matrices :

$$D := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N := \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

commutent. De plus $N^2 = 0$. Nous en déduisons que :

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right) = \exp(D + N) = \exp(D) \exp(N) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & \beta e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}.$$

Par suite :

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & e^{-\alpha} \mu \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^\alpha & \mu \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \quad (6)$$

D'après (5), (6) et le cours :

$$A = P \begin{pmatrix} e^\alpha & \mu \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} P^{-1} = P \exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & e^{-\alpha} \mu \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right) P^{-1} = \exp\left(P \begin{pmatrix} \alpha & e^{-\alpha} \mu \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}\right).$$

La matrice A est donc l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.