

Devoir surveillé n°4 — piste turquoise

samedi 29 novembre de 8h00 à 12h00

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

1. Questions de cours	1
2. Natures et sommes éventuelles de séries	1
3. Autour du théorème de comparaison avec une intégrale	1
3.1. Théorème de comparaison avec une intégrale	1
3.2. Applications	2
3.3. Contre-exemples	2
4. Règle de Raabe-Duhamel	3
5. Transformée d'Abel	3
6. Surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$	3

1. Questions de cours

- Rappeler la définition de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Donner la valeur de $\exp(A)$ dans le cas où $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Énoncer la règle de d'Alembert pour les séries numériques et démontrer le résultat dans le cas où $\ell < 1$.
- Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^\alpha} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?
- Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la famille $\left(\frac{1}{n^\alpha + m^\alpha} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

2. Natures et sommes éventuelles de séries

- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme, à l'aide de $\zeta(2) := \frac{\pi^2}{6}$.
- Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge et calculer sa somme.
- Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$.
- Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln^7(n)}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$.

3. Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des applications. On terminera par deux contre-exemples.

3.1. Théorème de comparaison avec une intégrale

Dans cette partie, f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$, $J_n = \int_0^n f(t) dt$ et pour tout entier k non nul, $I_k = \int_{k-1}^k f(t) dt$.

6. Préciser la monotonie des suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis démontrer que pour tout entier k non nul :

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) \, dt \leq f(k-1).$$

7. Démontrer que pour tout entier n non nul, $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.

8. Démontrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, si et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.

9. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t) \, dt - f(n) \right)$ converge.

3.2. Applications

On pose pour tout $\alpha > 0$ et $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.

10. Étudier la monotonie de la fonction f , calculer $\int_2^x f(t) \, dt$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

11. Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln(2)$, un encadrement de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

12. En utilisant Q9, établir que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On notera γ sa limite (constante d'Euler).

13. Justifier que, au voisinage de $+\infty$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et en déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

3.3. Contre-exemples

On pose pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

14. Calculer, pour n entier naturel non nul, $\int_n^{n+1} f(t) \, dt$. On pourra remarquer que :

$$\int_n^{n+1} f(t) \, dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t) \, dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t) \, dt.$$

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x .

15. Établir que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x |\sin(2\pi t)| \, dt \geq \frac{2}{\pi} (\lfloor x \rfloor - 1).$$

La fonction f est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Que dire de la nature de la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$?

On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction f continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ telle que $\sum_{n \geq 1} f(n)$ diverge.

16. Pour tout entier n non nul, trouver un réel a_n de sorte que le triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 ait une aire égale à $\frac{1}{n^2}$.

Dessiner l'allure d'une courbe de fonction f définie et continue sur $[1, +\infty[$ de la manière suivante : chaque entier naturel n non nul a pour image 1 et autour de chaque n (sur chaque intervalle $[n - a_n, n + a_n]$) tracer l'allure du triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1. Enfin, la fonction est nulle en dehors de tous les intervalles $[n - a_n, n + a_n]$.

Démontrer que cette fonction f fournit un contre-exemple.

4. Règle de Raabe-Duhamel

17. Soit β un nombre réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Former un développement asymptotique du quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

18. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

19. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

20. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose cette fois qu'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ diverge.

21. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{b+k}$.

5. Transformée d'Abel

22. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \quad [\text{transformation d'Abel}].$$

23. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telles que :

(H1) la suite de terme général $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$ est bornée ;

(H2) la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

24. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ diverge. Démontrer que, pour tout $\alpha < 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^\alpha} \text{ diverge.}$$

25. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente, mais non-absolument convergente.

26. Soient θ et α des nombres réels. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

6. Surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$

27. Démontrer que l'application :

$$\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_2(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \exp(M) \end{array} \right.$$

est bien définie et surjective.